eclass4U

ΥΠΗΡΕΣΙΕΣ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΤΟΜΟΣ Β ΧΡΗΜΑΤΟΙΚΟΙΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ & ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ

ΔΕΟ31

Σειρές σταθερών ή ομοιόμορφων μελλοντικών ποσών (Ράντες)

Ράντα:

Η Ράντα είναι ένας αριθμός συνεχών χρηματικών ποσών που καταβάλλονται ή εισπράττονται εντός ενός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος. Το ποσό που καταβάλλεται λέγεται Όρος της ράντας. Η ράντα που καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου λέγεται ληξιπρόθεσμη ράντα. Εμείς θα ασχοληθούμε μόνο ληξιπρόθεσμες. Επομένως, ράντα είναι μια ακολουθία καταβολών ενός σταθερού ποσού για ένα συγκεκριμένο αριθμό περιόδων που η κάθε καταβολή γίνεται :

(α) στο τέλος κάθε περιόδου (ληξιπρόθεσμη ράντα) ή

(β) στην αρχή κάθε περιόδου (προκαταβλητέα ράντα).

Μελλοντική Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας

Η μελλοντική αξία μιας σειράς ποσών είναι το άθροισμα όλων των σταθερών χρηματικών ποσών και ο ανατοκιζόμενος τόκος των ποσών αυτών που έχει συσσωρευτεί στο τέλος της σειράς (ράντας) δίνεται από τον τύπο

$\boldsymbol{MA = A * \left[\frac{(1+i)^{\nu}-1}{i}\right]}$ **ο τύπος αυτός δεν είναι στο τυπολόγιο σας αλλά στο πίνακα3**

Όπου ΜΑ = η τελική ή μμελλοντική αξία ενός ποσού.

A = το κατά περίοδο σταθερό χρηματικό ποσό (ράντα).

i = το επιτόκιο (αναγωγής ή προεξόφλησης).

ν = η διάρκεια της επένδυσης.

Ο Όρος εντός της αγκύλης είναι η ΤΕΛΙΚΗ αξία μιας νομισματικής μονάδας που εισπράττεται ή καταβάλλεται **κάθε έτος** για ν έτη με επιτόκιο

Παράδειγμα

Κάποιος διαθέτει 2000€ για 3 έτη με σταθερό επιτόκιο i=20%.

Ποια η μελλοντική αξία στο τέλος του 3 έτους;

$$\boldsymbol{MA = A\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] \Leftrightarrow MA = 2000\left[\frac{(1+0{,}2)^3-1}{0{,}2}\right] \Leftrightarrow MA = 3,64 * 2000 \Leftrightarrow MA = 7280}$$

2 τρόπος επίλυσης Πίνακας 3

Πίνακας 3

Η τελική αξία σειράς πληρωμών μιας νομισματικής μονάδας

$$TV_n = \sum_{t=0}^{n-1} (1+i)^t = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Περίοδοι	19%	20%	21%	22%	23%	24%
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	2,1900	2,2000	2,2100	2,2200	2,2300	2,2400
3	3,6061	3,6400	3,6741	3,7084	3,7429	3,7776
4	5,2913	5,3680	5,4457	5,5242	5,6038	5,6842
5	7,2966	7,4416	7,5892	7,7396	7,8926	8,0484
6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

$$\boldsymbol{MA = A * \Sigma\Pi AP(N = 3, i = 20\%) \Leftrightarrow MA = 2000 * 3,64 \Leftrightarrow}$$

$$\boldsymbol{MA = 7280}$$

ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΟΡΟΥ Α ΜΙΑΣ ΜΕΛΟΝΤΙΚΗΣ ΑΞΙΑΣ ΡΑΝΤΑΣ

Παράδειγμα

Επιθυμούμε να έχουμε μετα από 2 έτη το ποσό των 10.000 ευρώ €. Ποιο ποσό θα πρέπει να αποταμιεύουμε στη τράπεζα σταθερά στο τέλος του κάθε μήνα εάν το ετήσιο επιτόκιο είναι 12% ώστε να πέτυχουμε τον στόχο μας ;

Λύση

θα φτιάξω τη γραμμή του χρόνου απεικονίζοντας τα **2 χρόνια σε μήνες**

ΚΑΙ θα πρέπει να υπολογίσω το επιτόκιο από ετήσιο σε μηνιαίο

Επομένως θα έχω 24 μήνες ενώ το μηνιαίο επιτόκιο θα είναι $\frac{12\%}{12} = 0{,}01\Psi\ 1\%$

$$\boldsymbol{MA = A\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right] \Leftrightarrow MA = A\left[\frac{(1+0{,}01)^{24}-1}{0{,}01}\right] \Leftrightarrow}$$

$$\boldsymbol{A = \frac{10.000}{269735} \Leftrightarrow A = 370,73}$$

Θα μπορούσα και με χρήση του Πίνακα 3

$$\boldsymbol{MA = A * \Sigma\Pi AP(\nu = 24, \iota = 1\%) \Leftrightarrow A = \frac{MA}{\Sigma\Pi AP(\nu=24,\iota=1\%)}}$$

Η τελική αξία σειράς πληρωμών μιας νομισματικής μονάδας

$$TV_n = \sum_{t=0}^{n-1} (1+i)^t = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Περίοδοι	1%	2%	3%	4%	5%	6%
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	2,0100	2,0200	2,0300	2,0400	2,0500	2,0600
3	3,0301	3,0604	3,0909	3,1216	3,1525	3,1836
4	4,0604	4,1216	4,1836	4,2465	4,3101	4,3746
5	5,1010	5,2040	5,3091	5,4163	5,5256	5,6371
6	6,1520	6,3081	6,4684	6,6330	6,8019	6,9753
7	7,2135	7,4343	7,6625	7,8983	8,1420	8,3938
8	8,2857	8,5830	8,8923	9,2142	9,5491	9,8975
9	9,3685	9,7546	10,1591	10,5828	11,0266	11,4913
10	10,4622	10,9497	11,4639	12,0061	12,5779	13,1808
11	11,5668	12,1687	12,8078	13,4864	14,2068	14,9716
12	12,6825	13,4121	14,1920	15,0258	15,9171	16,8699
13	13,8093	14,6803	15,6178	16,6268	17,7130	18,8821
14	14,9474	15,9739	17,0863	18,2919	19,5986	21,0151
15	16,0969	17,2934	18,5989	20,0236	21,5786	23,2760
16	17,2579	18,6393	20,1569	21,8245	23,6575	25,6725
17	18,4304	20,0121	21,7616	23,6975	25,8404	28,2129
18	19,6147	21,4123	23,4144	25,6454	28,1324	30,9057
19	20,8109	22,8406	25,1169	27,6712	30,5390	33,7600
20	22,0190	24,2974	26,8704	29,7781	33,0660	36,7856
21	23,2392	25,7833	28,6765	31,9692	35,7193	39,9927
22	24,4716	27,2990	30,5368	34,2480	38,5052	43,3923
23	25,7163	28,8450	32,4529	36,6179	41,4305	46,9958
24	26,9735	30,4219	34,4265	39,0826	44,5020	50,8156
25	28,2432	32,0303	36,4593	41,6459	47,7271	54,8645

Παρούσα Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας

Παρούσα αξία μιας σειράς ποσών είναι το άθροισμα των παρουσών αξίων όλων των πόσων της σειράς . *Ο Όρος στην αγκύλη* ***λέγεται συντελεστής παρούσας αξίας*** *μιας νομισματικής μονάδας λαμβανομένης κατά έτος για ν έτη με προεξοφλητικό επιτόκιο ι*

$\boldsymbol{\Pi A = A * \left[\frac{1-\frac{1}{(1+i)^{\nu}}}{i}\right]}$ ***στο τυπολόγιο σας εμφανίζονται οι 2 μορφές του τύπου***

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΑΞΙΑΣ ΡΑΝΤΑΣ(ΣΠΑΡ): $ΣΠΑΡ = \sum_{i=1}^{n}(1+i)^{-n} = \frac{1-[1/(1+i)^{n}]}{i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

όπου i = Επιτόκιο προεξόφλησης, n = αριθμός περιόδων.

ΠΑ = η παρούσα αξία ενός ποσού.

Α = το κατά περίοδο σταθερό χρηματικό ποσό (ράντα).

i =το επιτόκιο (αναγωγής ή προεξόφλησης).

ν = η διάρκεια της επένδυσης.

Παράδειγμα

Επιθυμείς να έχεις 100,000€ για κάθε 3 έτη με επιτόκιο 10% πόσα χρήματα θα πρέπει **να έχεις τώρα** και να επενδύσεις ώστε να παίρνεις αυτά τα χρήματα

$$\Pi A = 100{,}000 * \Sigma\Pi A P(N = 3, I = 10\%) \Leftrightarrow \Pi A = 2{,}4869 * 100.000 = 248.690$$

Πίνακας 4

Η ΠΑ σειράς πληρωμών μιας νομισματικής μονάδας

$$PV = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^t} = \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

Περίοδοι	7%	8%	9%	10%	11%	12%
1	0,9346	0,9259	0,9174	0,9091	0,9009	0,8929
2	1,8080	1,7833	1,7591	1,7355	1,7125	1,6901
3	2,6243	2,5771	2,5313	2,4869	2,4437	2,4018
4	3,3872	3,3121	3,2397	3,1699	3,1024	3,0373
5	4,1002	3,9927	3,8897	3,7908	3,6959	3,6048

ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΟΡΟΥ Α ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΑΞΙΑΣ ΡΑΝΤΑΣ

Αρκετές φορές επιθυμούμε να γνωρίζουμε τη σειρά σταθερών χρηματικών ποσών είτε για να πληρώσουμε ένα δάνειο είτε να έχουμε ένα σταθερό ποσό για να καταναλώνουμε.

Παράδειγμα

Ενας συνταξιούχος εχει 100.000€ και επιθυμεί να γνωρίζει ποσά χρήματα μπορεί να εχει κάθε έτος για τα επόμενα 10 χρόνια. Το σχετικό επιτόκιο της τράπεζας είναι 10%.

Λύση

Παρούσα αξία μιας σειράς ποσών είναι το άθροισμα των παρουσών αξίων όλων των πόσων της σειράς

$$\Pi A = A\left[\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}\right] \Leftrightarrow A = \frac{\Pi A}{\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}} \Leftrightarrow$$

$$A = \frac{100.000}{\frac{1-\frac{1}{(1+10\%)^{10}}}{10\%}} \Leftrightarrow A = \frac{100.000}{6{,}1446} \Leftrightarrow A = \underline{16274{,}54}$$

Μπορούσαμε και με τη χρήση του πίνακα 4

$$A = \frac{100.000}{\Sigma\Pi AP(\nu=10, i=10\%} \Leftrightarrow A = 16274{,}54$$

Πίνακας 4

Η ΠΑ σειράς πληρωμών μιας νομισματικής μονάδας

$$PV = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^t} = \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

Περίοδοι	7%	8%	9%	10%	11%	12%
1	0,9346	0,9259	0,9174	0,9091	0,9009	0,8929
2	1,8080	1,7833	1,7591	1,7355	1,7125	1,6901
3	2,6243	2,5771	2,5313	2,4869	2,4437	2,4018
4	3,3872	3,3121	3,2397	3,1699	3,1024	3,0373
5	4,1002	3,9927	3,8897	3,7908	3,6959	3,6048
6	4,7665	4,6229	4,4859	4,3553	4,2305	4,1114
7	5,3893	5,2064	5,0330	4,8684	4,7122	4,5638
8	5,9713	5,7466	5,5348	5,3349	5,1461	4,9676
9	6,5152	6,2469	5,9952	5,7590	5,5370	5,3282
10	7,0236	6,7101	6,4177	6,1446	5,8892	5,6502

Ράντα στο διηνεκές

Είναι μια σειρά πληρωμών που γίνονται στο διηνεκές (επ’ άπειρον).

ΠΑ = Α/i

o **<u>Τοκοχρεολύσια:</u>**

Είναι μια σειρά ισόποσων δόσεων τα οποία εξοφλούν το αρχικό δάνειο μμαζί με τους τόκους ου αναλογούν.

SOS :Θα πρέπει να τονίσουμε ότι στις ασκήσεις που θα ακολουθήσουν χρησιμοποιούμε <u>μόνο Ληξιπρόθεσμες Ράντες</u>

ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΞΟΦΛΗΣΗ ΔΑΝΕΙΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΚΟΧΡΕΟΛΥΣΙΟΥ :

είναι μια σειρά ισόποσων δόσεων τα οποία εξοφλούν το αρχικό δάνειο μαζί με τους τόκους που αναλογούν.

Παρατήρηση :

Κάθε τοκοχρεολύσιο περιλαμβάνει 2 μέρη. Το ένα μέρος αποπληρώνει το αρχικό κεφάλαιο, (το αρχικό δάνειο) ενώ το άλλο αντιπροσωπεύει τον τόκο. Ο τόκος υπολογίζεται στο ανεξόφλητο μέρος του δάνειου που οφείλεται στην αρχή κάθε περιόδου.

Παράδειγμα του βιβλίου

Μία επιχείρηση δανείστηκε ποσό 1000 ευρώ με επιτόκιο 20%. Το δάνειο μαζί με τους αναλογούντες τόκους θα εξοφληθεί **σε 3 ισόποσες δόσεις ύψους 475 ευρώ η κάθε μία**. Για κάθε δόση, να υπολογιστεί τι αντιστοιχεί σε τόκο και τι σε αποπληρωμή του αρχικού κεφαλαίου.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ ΔΑΝΕΙΟΥ

Έτος (1)	Χρέος στην αρχή του έτους (2)	Τοκοχρεολύσια (3)	Ετήσιος τόκος (4)=(2) x 0,2	Αποπληρωμή χρέους (5)=(3) – (4)	Χρέος στο τέλος του έτους (6)=(2) – (5)
1	1.000	475	200	275	725
2	725	475	145	330	395
3	395	475	79	396	0

ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΜΙΑΣ ΡΑΝΤΑΣ

Πολλές φορές είναι άγνωστο το επιτόκιο που χρησιμοποιείται για το υπολογισμό των σταθερών όρων ράντας τότε θα μπορούμε να το υπολογίσουμε ως εξής :

Παράδειγμα μια επιχείρηση δανείστηκε 1000 ευρώ Το δάνειο μαζί με τους αναλογούντες τόκους θα εξοφληθεί **σε 3 ισόποσες δόσεις ύψους 438 ευρώ η κάθε μία. Να υπολογίσετέ το επιτόκιο** που χρησιμοποιεί η τράπεζα για τον υπολογισμό των τοκοχρεολυσίων.

Λύση

Δανειστήκαμε 1000 ευρώ άρα έχω ΠΑ =1000 ΚΑΙ ΙΣΟΠΟΣΕΣ ΔΟΣΕΙΣ =475

$$\boldsymbol{\Pi A = A\left[\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}\right] \Leftrightarrow \left[\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}\right] = \frac{\Pi A}{A}}$$

ΟΥΣΙΑΣΤΙΚΑ ΘΑ ΚΑΝΩ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ 4 ΔΙΟΤΙ Ο ΟΡΟΣ

$$\boldsymbol{\left[\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}\right] = \Sigma\Pi AP(N=3, I=;) = \frac{\Pi A}{A} \Leftrightarrow}$$

$$\boldsymbol{\Sigma\Pi AP(N=3, I=;) = \frac{1000}{438} = 2,283}$$

ΤΟΤΕ ΣΑΡΩΝΩ ΓΙΑ Ν=3 ΤΟΝ ΠΙΝΑΚΑ 3 ΩΣΤΕ ΝΑ ΒΡΩ ΤΟ 2,283

Πίνακας 4

Η ΠΑ σειράς πληρωμών μιας νομισματικής μονάδας

$$PV = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^t} = \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

Περίοδοι	13%	14%	15%	16%	17%	18%
1	0,8850	0,8772	0,8696	0,8621	0,8547	0,8475
2	1,6681	1,6467	1,6257	1,6052	1,5852	1,5656
3	2,3612	2,3216	2,2832	2,2459	2,2096	2,1743
4	2,9745	2,9137	2,8550	2,7982	2,7432	2,6901
5	3,5172	3,4331	3,3522	3,2743	3,1993	3,1272

Επομένως το επιτόκιο δανεισμού είναι 15%