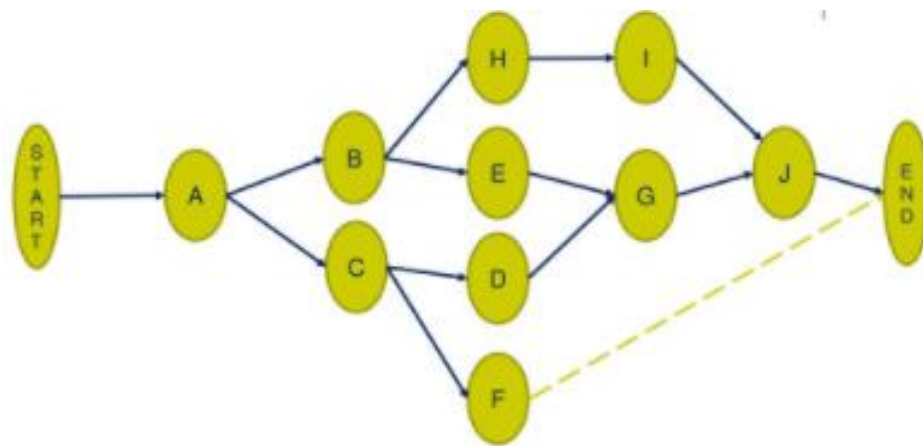


*ΔΕΟ 40- Διοικητική Επιχειρήσεων και  
Οργανισμών*



*ΔΙΚΤΥΑ PERT - ΘΕΩΡΙΑ*

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΥΛΗΣ: ΒΙΚΥ ΒΑΡΛΑ

T. 210-5711484  
K- 6970-401981 & 6945-310630

WWW.ECLASS4U.GR  
grammateia.eclass4U@gmail.com

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### Η μέθοδος των δικτυωτών γραφημάτων με πιθανοτική θεώρηση των χρόνων (μέθοδος PERT)

Όπως αναφέραμε στις προηγούμενες σημειώσεις η CPM και η MPM, θεωρούν ότι η διάρκεια των χρονικών δραστηριοτήτων ( $T_{\text{δραστηριοτήτων}}$ ) είναι σταθερές. Η μέθοδος PERT (που απεικονίζει το έργο όπως η μέθοδος CPM) θεωρεί ότι για κάθε δραστηριότητα υπάρχει μια *αισιόδοξη*, μια *απαισιόδοξη* και μια *αναμενόμενη* χρονική διάρκεια, δηλαδή, ότι η χρονική της διάρκεια των δραστηριοτήτων δεν είναι σταθερή.

Με τον τρόπο αυτό η μέθοδος αυτή στην ουσία μας βοηθάει:

- να εκτιμήσουμε την πιθανότητα να ολοκληρωθεί το έργο εντός κάποιου χρονικού διαστήματος
- να βρούμε τον χρόνο ολοκλήρωσης ενός έργου με δεδομένη πιθανότητα P (συνήθως γύρω στο 90%)
- να υπολογίσουμε την αναμενόμενη διάρκεια ενός έργου

Στη μέθοδο PERT θεωρείται ότι μια δραστηριότητα που αναμένεται να διαρκέσει  $d$  ΧΜΠ μπορεί να διαρκέσει υπό **κανονικές συνθήκες** (δηλαδή χωρίς πρόσθεση ή αφαίρεση πόρων)  $x$  ΧΜΠ λιγότερο ή  $y$  ΧΜΠ περισσότερο λόγω *αβέβαιης χρονικής εκτίμησης*. Έτσι, η πραγματική χρονική διάρκεια της δραστηριότητας ( $t$ ) μπορεί να κυμανθεί στο διάστημα  $d-x \leq t \leq d+y$ . Άρα στην μέθοδο PERT αυτό που μας ενδιαφέρει είναι το ονομαζόμενο *εύρος της χρονικής διάρκειας της δραστηριότητας* (από  $d-x$  μέχρι  $d+y$ ).

Με αυτόν τον τρόπο εκφράζω πιθανοτικά την χρονική διάρκεια της δραστηριότητας και κατ' επέκταση, μπορώ να μιλήσω πιθανοτικά για την διάρκεια του έργου. Έτσι, μπορώ να πω για την "*πιθανότητα να τελειώσει το έργο σε κάποιο χρονικό διάστημα*" (π.χ. υπάρχει πιθανότητα άνω του 90% να ολοκληρωθεί το έργο στην τάδε χρονική διάρκεια.).

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΥΛΗΣ: ΒΙΚΥ ΒΑΡΛΑ

Στην μέθοδο PERT θεωρείται ότι η διάρκεια κάθε δραστηριότητας είναι:

- συνεχής τυχαία μεταβλητή
- πιθανοτικά ανεξάρτητη από την διάρκεια κάθε άλλης δραστηριότητας
- μεταβλητή που ακολουθεί την β-κατανομή

Η χρονική διάρκεια κάθε δραστηριότητας  $i$  εκτιμάται σε τρεις τιμές:

- ❖ *Αισιόδοξη διάρκεια ( $a_i$ )* □ Όταν η πιθανότητα, κάτω από κανονικές συνθήκες, η δραστηριότητα να έχει μικρότερη διάρκεια είναι 1 στις 20, δηλαδή 5%. Από τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής β είναι εκείνο το  $x < 0,5$  τέτοιο ώστε  $f(x) = 0,05$ .
- ❖ *Απαισιόδοξη διάρκεια ( $b_i$ )* □ Όταν η πιθανότητα, κάτω από κανονικές συνθήκες, η δραστηριότητα να έχει μικρότερη διάρκεια είναι 1 στις 20, δηλαδή 5%. Από τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής β είναι εκείνο το  $x > 0,5$  τέτοιο ώστε  $f(x) = 0,05$ .
- ❖ *Κανονική διάρκεια ( $m_i$ )* □ Η πιο πιθανή διάρκεια της δραστηριότητας η οποία αντιστοιχεί στην πιο πιθανή τιμή της β-κατανομής.

Στην μέθοδο PERT οι διάφοροι υπολογισμοί στηρίζονται στο *θεώρημα του κεντρικού ορίου* σύμφωνα με το οποίο, το άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού πιθανοτικά ανεξάρτητων μεταβλητών ακολουθεί μια κατανομή που προσεγγίζει την κανονική κατανομή με (α) μέση τιμή ίση με το άθροισμα των μέσων τιμών και (β) διακύμανση ίση με το άθροισμα των διακυμάνσεων

Στην περίπτωση των δικτυωτών γραφημάτων γίνονται οι παραδοχές (α) ότι η χρονική διάρκεια κάθε δραστηριότητας είναι μια ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή και (β) ότι η κρίσιμη διαδρομή περιέχει μεγάλο αριθμό δραστηριοτήτων (περισσότερες από τέσσερις) και βάση του θεωρήματος του κεντρικού ορίου, θεωρούμε ότι:

- η μέση χρονική διάρκεια ενός έργου (τέργου) είναι ίση με το άθροισμα των μέσων τιμών των χρονικών διαρκειών που έχουν οι δραστηριότητες της

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΥΛΗΣ: ΒΙΚΥ ΒΑΡΛΑ

κρίσιμης διαδρομής ( $t_{k,m}$ )

η τυπική απόκλιση του έργου είναι ( $\sigma_{\text{έργου}}$ ) είναι ίση με την τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των διακυμάνσεων των δραστηριοτήτων της κρίσιμης διαδρομής ( $\sigma^2_{\kappa}$ ) (**ΠΡΟΣΟΧΗ:** όταν έχω παραπάνω της μιας κρίσιμες διαδρομές το  $\sigma_{\text{έργου}}$  είναι ίσο με την τετραγωνική ρίζα του **μέγιστου** αθροίσματος των διακυμάνσεων των δραστηριοτήτων των κρίσιμων

□ διαδρομών, δηλαδή  $\sqrt{\max \sum \sigma^2_{\kappa}}$ )

Η πιθανότητα το έργο να ολοκληρωθεί σε χρόνο μικρότερο ή ίσο δοθέντος χρόνου  $T$ , δηλαδή η  $P(t \leq T)$  βρίσκεται αφού υπολογίσουμε την τυποποιημένη μεταβλητή

$Z_{\text{έργου}}$  με τον τύπο  $Z_{\text{έργου}} = \frac{T-t_{\text{έργου}}}{\sigma_{\text{έργου}}}$  και βρούμε από τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής την πιθανότητα  $P(x \leq Z_{\text{έργου}})$

Για να εφαρμόσουμε την μέθοδο PERT σε ένα έργο ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- ✚ Για κάθε δραστηριότητα  $i$  **εκτιμάμε** τον αισιόδοξο χρόνο ( $a_i$ ), τον απαισιόδοξο χρόνο ( $b_i$ ) και τον αναμενόμενο χρόνο ( $m_i$ ) υλοποίησης της. Με την βοήθεια των χρόνων αυτών **εκτιμάμε** την μέση τιμή  $t_{m,i}$  (ή αλλιώς αναμενόμενη διάρκεια της δραστηριότητας) και την τυπική απόκλιση  $\sigma_i$ .
- ✚ **Επιλύουμε το δικτυωτό γράφημα** (όπως στην CPM) με χρονικές διάρκειες των δραστηριοτήτων τις μέσες τιμές τους ( $t_{m,i}$ ) και προσδιορίζουμε τις κρίσιμες διαδρομές του δικτύου
- ✚ Μετά την παραπάνω επίλυση (και σύμφωνα με το θεώρημα του κεντρικού ορίου) **υπολογίζεται** η αναμενόμενη διάρκεια του έργου ( $t_{\text{έργου}}$ ) ως άθροισμα των αναμενόμενων διαρκειών των δραστηριοτήτων της κρίσιμης διαδρομής και η τυπική απόκλιση του έργου ( $\sigma_{\text{έργου}}$ ) ως η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των διακυμάνσεων των δραστηριοτήτων της κρίσιμης διαδρομής (όταν έχω παραπάνω της μίας παίρνω το  $\max$  των αθροισμάτων αυτών από όλες τις κρίσιμες διαδρομές)
- ✚ Στην συνέχεια υπολογίζουμε την τυποποιημένη μεταβλητή του έργου ( $Z_{\text{έργου}}$ ) και με βάση τους πίνακες αθροιστικής πιθανότητας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής επιλύουμε τα δυο ερωτήματα που συνήθως θέτει η PERT.

Τα βασικά πλεονεκτήματα της PERT είναι ότι α) λαμβάνει υπόψη της την αβεβαιότητα που υπάρχει σχετικά με τον χρόνο ολοκλήρωσης μιας

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΥΛΗΣ: ΒΙΚΥ ΒΑΡΛΑ

δραστηριότητας και β) μπορεί να υπολογίσει την πιθανότητα ολοκλήρωσης του έργου σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Τα βασικά μειονεκτήματα της είναι ότι βασίζεται σε κάποιες παραδοχές και ότι δεν μπορεί να απεικονίσει σύνθετες σχέσεις αλληλουχίας μεταξύ των δραστηριοτήτων (όπως συμβαίνει και στην CPM).

### Τυπολόγιο

**Μέση χρονική διάρκεια δραστηριότητας  $i \rightarrow t_{m,i} = \frac{a+4m+b}{6}$**   
(ή αναμενόμενη διάρκεια )

**Τυπική απόκλιση της χρονικής διάρκειας δραστηριότητας  $i \rightarrow \sigma_i = \frac{b-a}{3,2}$**

**Τυπική απόκλιση έργου  $\rightarrow \sigma_{\text{έργου}} = \sum \sigma_k$  (ή  $\max \sum \sigma_k$  αν έχω παραπάνω της 1 κρίσιμες διαδρομές)**

**Μέση χρονική διάρκεια έργου  $\rightarrow t_{\text{έργου}} = \sum t_{k,m}$**

**Τυποποιημένη μεταβλητή έργου  $\rightarrow Z_{\text{έργου}} = \frac{T-t_{\text{έργου}}}{\sigma_{\text{έργου}}}$**

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΥΛΗΣ: ΒΙΚΥ ΒΑΡΛΑ

T. 210-5711484  
K- 6970-401981 & 6945-310630

WWW.ECLASS4U.GR  
grammateia.eclass4U@gmail.com