ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ ΔΕΟ 13

Eclass4U

The best Choice for you

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ:08-11-21

ΣΥΝΤΑΚΤΗΣ:ΣΠΥΡΟΣ ΒΛΑΧΟΠΟΥΛΟΣ

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Είδαμε ότι συνάρτηση (function) είναι μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α (του πεδίου ορισμού της συνάρτησης) αντιστοιχίζεται σε ακριβώς ένα στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου Β (του συνόλου τιμών της συνάρτησης). Πολλές φορές, μελετώντας το μέγεθος που περιγράφει μια συνάρτηση, μας είναι χρήσιμο να μπορούμε να υπολογίσουμε τις οριακές μεταβολές του όταν, αντίστοιχα, μεταβάλλεται οριακά η μεταβλητή της συνάρτησης.

Έτσι, αν έχουμε την συνάρτηση y=f(x) τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f, και συμβολίζεται με y'=f'(x)= $\frac{df}{dx}$ και είναι ίση με την οριακή μεταβολή της τιμής της συνάρτησης f, προς την αντίστοιχη οριακή μεταβολή της μεταβλητής χ.

Στο εξής, οι συμβολισμοί f'(x) και $\frac{df}{dx}$ είναι ισοδύναμοι και εκφράζουν την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f.

Η παράγωγος της f'(x) λέγεται **δεύτερη παράγωγος της f και συμβολίζεται με f''(x).**

Επιπλέον, με την χρήση της παραγώγου, εκτός από τις οριακές μεταβολές μιας συνάρτησης, όπως θα δούμε, μπορούμε να υπολογίσουμε και τον **ρυθμό μεταβολής**, **την κλίση εφαπτομένης** συνάρτησης, να εντοπίσουμε την θέση **μεγίστου ή ελαχίστου** της συνάρτησης, να μελετήσουμε την **μονοτονία** της (τα διαστήματα στα οποία είναι αύξουσα – φθίνουσα), την **κυρτότητα** της συνάρτησης (τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη).

SITE: www.Eclass4U.gr
Τ. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Οι κανόνες παραγώγισης, όπως δίνονται και στο τυπολόγιο που είναι διαθέσιμο στις εξετάσεις, είναι οι παρακάτω

Κανόνες παραγώγισης συναρτήσεων με μεταβλητή το x

- $(a)' = 0$
- $(x)' = 1$
- $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
- $(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $(f^n(x))' = n \cdot f'(x) \cdot f^{n-1}(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$, $g(x) \neq 0$
- $(e^x)' = e^x$, $\quad (e^{f(x)})' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $\quad (\ln f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
- $(f(x)^{g(x)})' = (g(x) \cdot \ln f(x))' \cdot f(x)^{g(x)}$
- $(a^{f(x)})' = f'(x) \cdot a^{f(x)} \cdot \ln a$
- $\left(\sqrt[m]{f(x)^n}\right)' = \dfrac{n}{m} \cdot f(x)^{\frac{n}{m}-1} \cdot f'(x) = \dfrac{n}{m} \cdot \sqrt[m]{f(x)^{n-m}} \cdot f'(x)$
- Αν $y = y(u)$ και $u = u(x)$ τότε $\dfrac{dy(x)}{dx} = \dfrac{dy(u)}{du} \cdot \dfrac{du(x)}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ (*αλυσωτός κανόνας*).
- Αν η συνάρτηση g είναι αντίστροφη της f (δηλαδή $g[f(x)] = x$)

  τότε $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ όπου $y = f(x)$ ή $\dfrac{dy(x)}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx(y)}{dy}}$

Ας δούμε τους κανόνες αναλυτικά

1. (α)’=0 ή (c)’=0

Δηλαδή, η παράγωγος οποιουδήποτε σταθερού αριθμού είναι πάντα μηδέν

π.χ. $(3)'=0$ $\quad (\frac{1}{3})'=0$ $\quad (\sqrt{12})'=0$ $\quad (e)'=0$

2. (x)’=1

Δηλαδή, η παράγωγος της μεταβλητής χ (σε εκθέτη 1) είναι ίση με τη μονάδα

SITE: www.Eclass4U.gr
Τ. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

3. $(x^α)' = α \cdot x^{α-1}$

Δηλαδή, για την παράγωγο οποιασδήποτε δύναμης της μεταβλητής χ, **κατεβάζουμε τον εκθέτη μπροστά από το χ (ως συντελεστή) και στη συνέχεια μειώνουμε τον εκθέτη κατά μια μονάδα.**

Παραδείγματα

$(x^3)' = 3 \cdot x^{3-1} = 3 \cdot x^2$

$(x^{-2})' = -2 \cdot x^{-2-1} = -2 \cdot x^{-3} = -2 \cdot \frac{1}{x^3}$ (αφού $α^{-ν} = \frac{1}{α^ν}$, η μοναδική ιδιότητα των δυνάμεων που επιτρέπει να απαλλαγούμε από αρνητικό εκθέτη)

Επομένως, εφαρμόζουμε τον κανόνα **$(x^α)' = α \cdot x^{α-1}$** ακόμα και σε αρνητικό εκθέτη του χ

$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$ (χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα των ριζών $\sqrt{α} = α^{\frac{1}{2}}$ ώστε να απαλλαγούμε από την ρίζα και να καταλήξουμε με την μεταβλητή υψωμένη σε έναν εκθέτη, ακόμα κι αν ο εκθέτης είναι κλάσμα)

Επομένως, εφαρμόζουμε τον κανόνα **$(x^α)' = α \cdot x^{α-1}$** ακόμα και όταν η μεταβλητή χ είναι σε τετραγωνική ρίζα

$$(\sqrt[3]{x^2})' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-\frac{3}{3}} = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

(χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα των ριζών $\sqrt[ν]{α^μ} = α^{\frac{μ}{ν}}$ ώστε η $\sqrt[3]{x^2}$ που είχαμε να παραγωγίσουμε αρχικά, να γραφτεί ως μια δύναμη του χ)

Επομένως, εφαρμόζουμε τον κανόνα **$(x^α)' = α \cdot x^{α-1}$** ακόμα και όταν η μεταβλητή είναι σε οποιασδήποτε τάξης ρίζα.

SITE: www.Eclass4U.gr
Τ. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL: grammateia.eclass4u@gmail.com

4. $\left(\alpha \cdot f(x)\right)' = \alpha \cdot f'_{(x)}$

Δηλαδή, αν έχουμε μέσα στην ζητούμενη παράγωγο το γινόμενο οποιουδήποτε σταθερού αριθμού με οποιαδήποτε συνάρτηση του χ, τότε μπορούμε να βγάλουμε τον σταθερό αριθμό εκτός της παραγώγου.

Παραδείγματα

$(5x^3)' = 5(x^3)' = 5 \cdot 3 \cdot x^{3-1} = 15 \cdot x^2$

$\left(\frac{1}{2} \cdot x^2\right)' = \frac{1}{2} \cdot (x^2)' = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^{2-1} = x$

$(-x^{-1})' = (-1) \cdot (x^{-1})' = (-1) \cdot (-1) \cdot x^{-1-1} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

$\left(-\frac{1}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right)' = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{4} \cdot x^{\frac{3}{2}-\frac{2}{2}} = -\frac{3}{4} \cdot x^{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{4} \cdot \sqrt{x}$

$(e \cdot x^{-2})' = e \cdot (x^{-2})' = e \cdot (-2) \cdot x^{-2-1} = -2 \cdot e \cdot x^{-3} = -2 \cdot e \cdot \frac{1}{x^3}$

Υπενθυμίζεται ότι ο e είναι ένας σταθερός αριθμός (μια σημαντική μαθηματική σταθερά, με άπειρα δεκαδικά ψηφία, και είναι περίπου ίσος με e=2,71828)

5. $(e^x)' = e^x$

Δηλαδή, η παράγωγος της εκθετικής e^x , είναι η ίδια η e^x

$(-3 \cdot e^x)' = (-3) \cdot (e^x)' = -3 \cdot e^x$

SITE: www.Eclass4U.gr
Τ. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Δηλαδή, η παράγωγος της λογαριθμικής συνάρτησης lnx είναι ίση με το κλάσμα $\frac{1}{x}$. Δεν χρειάζεται να περιορίσουμε την τιμή του χ (λόγω του παρονομαστή) γιατί, οποιαδήποτε παράσταση είναι εντός του ln είναι πάντα θετική (άρα χ>0, κι ως εκ τούτου και $x \neq 0$)

$$\left(\frac{e}{2} \cdot \ln x\right)' = \frac{e}{2} \cdot (\ln x)' = \frac{e}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{e}{2 \cdot x}$$

7. $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$

Δηλαδή, αν παραγωγίζουμε μια παράσταση η οποία έχει άθροισμα ή διαφορά επιμέρους παραστάσεων του χ, τότε πολύ απλά «σπάμε» την παράγωγο στις επιμέρους παραγώγους. Προφανώς, η παραπάνω ιδιότητα ισχύει ακόμα κι αν έχουμε περισσότερες από δύο συναρτήσεις του χ εντός της παρένθεσης.

Παραδείγματα

$$(3x^4 + 5x^6)' = (3x^4)' + (5x^6)' = 3 \cdot (x^4)' + 5 \cdot (x^6)' =$$
$$= 3 \cdot 4 \cdot x^{4-1} + 5 \cdot 6 \cdot x^{6-1} = 12 \cdot x^3 + 30 \cdot x^5 = 6x^3 \cdot (2 + 5x^2)$$

$$(2x^3 - 5x^2)' = (2x^3)' - (5x^2)' = 2 \cdot (x^3)' - 5 \cdot (x^2)' =$$
$$= 2 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - 5 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 6x^2 - 10x = 2x \cdot (3x - 5)$$

$$(\ln x - 5x^2)' = (\ln x)' - (5x^2)' = \frac{1}{x} - 5 \cdot (x^2)' = \frac{1}{x} - 5 \cdot 2 \cdot x^{2-1} =$$
$$= \frac{1}{x} - 10 \cdot x = \frac{1}{x} - \frac{10 \cdot x \cdot x}{x} = \frac{1 - 10x^2}{x}$$

$$\left(3\ln x + e^x - \sqrt{x}\right)' = (3\ln x)' + (e^x)' - \left(\sqrt{x}\right)' = 3 \cdot (\ln x)' + e^x - \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' =$$
$$= 3 \cdot \frac{1}{x} + e^x - \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{3}{x} + e^x - \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}} = \frac{3}{x} + e^x - \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{3}{x} + e^x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{x} + e^x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{3}{x} + e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Σημείωση : Παρόλο που δεν υπάρχει στο τυπολόγιό μας, είναι γνωστή από την ύλη της τρίτης λυκείου η σχέση $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ και μπορούμε να την χρησιμοποιούμε χωρίς πρόβλημα.

SITE: www.Eclass4U.gr
Τ. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

8. $\left(\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x})\right)' = \mathbf{f}'_{(\mathbf{x})} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}'_{(\mathbf{x})}$

Δηλαδή, η παράγωγος ενός γινομένου δύο συναρτήσεων ισούται με την παράγωγο της πρώτης επί την δεύτερη, συν την πρώτη επί την παράγωγο της δεύτερης.

Παραδείγματα

$$(x^5 \cdot e^x)' = (x^5)' \cdot e^x + x^5 \cdot (e^x)' = 5 \cdot x^{5.1} \cdot e^x + x^5 \cdot e^x =$$
$$= 5 \cdot x^4 \cdot e^x + x^5 \cdot e^x = x^4 \cdot e^x \cdot (5 + x)$$

$$(2x^3 \cdot \ln x)' = (2x^3)' \cdot \ln x + 2x^3 \cdot (\ln x)' = 2 \cdot (x^3)' \ln x + 2x^3 \frac{1}{x} =$$
$$= 2 \cdot 3 \cdot x^{3-1} \cdot \ln x + 2 \cdot \frac{x^3}{x} = 6x^2 \cdot \ln x + 2x^2 = 2x^2 \cdot (3 \ln x + 1)$$

$$[(3x^2 + x) \cdot (2x^4 - 3)]' =$$
$$= (3x^2 + x)' \cdot (2x^4 - 3) + (3x^2 + x) \cdot (2x^4 - 3)' =$$
$$= [(3x^2)' + (x)'] \cdot (2x^4 - 3) + (3x^2 + x) \cdot [(2x^4)' - (3)'] =$$
$$= [3 \cdot (x^2)' + 1] \cdot (2x^4 - 3) + (3x^2 + x) \cdot [2 \cdot (x^4)' - 0] =$$
$$= (3 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 1) \cdot (2x^4 - 3) + (3x^2 + x) \cdot (2 \cdot 4 \cdot x^{4-1}) =$$
$$= (6 \cdot x + 1) \cdot (2x^4 - 3) + (3x^2 + x) \cdot 8x^3 =$$
$$= 6x \cdot 2x^4 - 6 \cdot x \cdot 3 + 2x^4 - 3 + 3x^2 \cdot 8x^3 + x \cdot 8x^3 =$$
$$= 12x^5 - 18x + 2x^4 + 24x^5 + 8x^4 =$$
$$= 36x^5 + 10x^4 - 18x - 3$$

Επομένως, στον κανόνα παραγώγισης γινομένου δυο συναρτήσεων, μπορεί η κάθε συνάρτηση να είναι μια ολόκληρη παρένθεση-παράσταση του χ.

$$(e^x \cdot \ln x)' = (e^x)' \cdot \ln x + e^x \cdot (\ln x)' = e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} = e^x \cdot \left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$$

Πως, όμως, διαχειριζόμαστε παραγώγιση ενός γινομένου το οποίο αποτελείται από 3 ή περισσότερους όρους, αντί για 2 που περιγράφει ο κανόνας του γινομένου;

Παράδειγμα : να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = x^{-3} \cdot e^x \cdot \ln x$

SITE: www.Eclass4U.gr
Τ. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

Η συνάρτηση είναι γινόμενο τριών όρων. Γνωρίζουμε να παραγωγίζουμε γινόμενα που αποτελούνται από δύο όρους . Σε τέτοιες περιπτώσεις, επιλέγουμε κατάλληλες «ομάδες» των όρων που διαθέτουμε, ώστε να παραγωγίσουμε σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου. Στο παραπάνω παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε το x^{-3} ως την μια από τις δυο συναρτήσεις που χρειαζόμαστε, και το $(e^x \cdot ln\, x)$ ως την δεύτερη.

Έτσι θα έχουμε :

$$f'_{(x)} = [x^{-3} \cdot (e^x \ln x)]' = (x^{-3})' \cdot e^x \ln x + x^{-3} \cdot (e^x \ln x)' =$$
$$= -3 \cdot x^{-3-1} \cdot e^x \cdot \ln x + x^{-3} \cdot [(e^x)' \cdot \ln x + e^x \cdot (\ln x)'] =$$
$$= -3 \cdot x^{-4} \cdot e^x \cdot \ln x + x^{-3} \cdot \left(e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x}\right) =$$
$$= -\frac{3 \cdot e^x \cdot \ln x}{x^4} + \frac{1}{x^3} \cdot \left(e^x \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

9. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Δηλαδή, για να παραγωγίσουμε το πηλίκο δυο συναρτήσεων, προκύπτει ένα κλάσμα που για αριθμητή έχει την παράγωγο του αριθμητή επί τον παρονομαστή, μείον τον αριθμητή επί την παράγωγο του παρονομαστή, και για παρονομαστή του έχει τον παρονομαστή στο τετράγωνο. Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής του κλάσματος που προκύπτει, είναι σχεδόν ίδιος με την παράγωγο του γινομένου δυο συναρτήσεων, μόνο που αντί για +, έχει -.

Παραδείγματα

$$\left(\frac{x^2}{e^x}\right)' = \frac{(x^2)'e^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{2 \cdot x^{2-1} \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{2 \cdot x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{e^{2x}} =$$
$$= \frac{xe^x(2-x)}{e^{2x}} = \frac{x(2-x)}{e^x}$$

$$\left(\frac{x^3}{\ln x}\right)' = \frac{(x^3)' \cdot \ln x - x^3 \cdot (\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{3 \cdot x^{3-1} \ln x - x^3 \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{3x^2 \ln x - x^2}{(\ln x)^2} =$$
$$= \frac{x^2(3\ln x - 1)}{(\ln x)^2}$$

$$\left(\frac{e^x}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{(e^x)'\cdot\sqrt{x} - e^x\cdot\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{e^x\cdot\sqrt{x} - e^x\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'}{x} =$$

$$= \frac{e^x\cdot\sqrt{x} - e^x\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}}{x} = \frac{e^x\cdot\sqrt{x} - \frac{1}{2}\cdot e^x\cdot x^{-\frac{1}{2}}}{x} = \frac{e^x\cdot\sqrt{x} - \frac{1}{2}\cdot e^x\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}{x} =$$

$$= \frac{e^x\cdot\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x}$$

$$\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2-1)'\cdot(x^2+1) - (x^2-1)\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{[(x^2)' - (1)']\cdot(x^2+1) - (x^2-1)\cdot[(x^2)' + (1)']}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x\cdot(x^2+1) - (x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x\cdot x^2 + 2x - (x^2 2x - 2x)}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)' = \frac{(x^2-x+1)'\cdot(x^2+x+1) - (x^2-x+1)(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2} =$$

$$= \frac{(2x-1)\cdot(x^2+x+1) - (x^2-x+1)\cdot(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} =$$

$$= \frac{2xx^2 + 2xx + 2x - x^2 - x - 1 - (x^2 2x + x^2 - x2x - x + 2x + 1)}{(x^2+x+1)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x - x^2 - x - 1 - 2x^3 - x^2 + 2x^2 + x - 2x - 1}{(x^2+x+1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2(x+1)\cdot(x-1)}{(x^2+x+1)^2}$$

1. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μέχρι στιγμής, οι βασικές συναρτήσεις που έχουμε στη διάθεσή μας για να παραγωγίσουμε οποιαδήποτε παράσταση, είναι, ουσιαστικά, οι εξής τέσσερις:

$$(x^{v})' = v \cdot x^{v-1}$$

$$(e^{x})' = e^{x}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Η τελευταία δεν βρίσκεται στο τυπολόγιο, παρόλα αυτά θεωρείται γνωστή από το λύκειο και μπορούμε να την χρησιμοποιούμε. Ακόμα κι αν χρειαστεί να τον αποδείξουμε, προκύπτει εύκολα ως εξής:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Υπάρχουν, όμως, παραστάσεις, οι οποίες προκύπτουν από την σύνθεση δυο (ή περισσοτέρων) συναρτήσεων. Για παράδειγμα, η e^{2x+1} αποτελεί την σύνθεση της e^{x} με την $2x + 1$.

Η $\sqrt{x^2 + x + 1}$ προκύπτει από την σύνθεση της $\sqrt{x}$ με την $x^2 + x + 1$.

Η $\ln(x^2 + 2)$ ομοίως, προκύπτει από την σύνθεση της $\ln x$ με την $x^2 + 2$.

Η $(e^{x} + 1)^3$ είναι η σύνθεση της x^3 με την $e^{x} + 1$

Με απλά λόγια, σύνθετη είναι η συνάρτηση που στον τύπο της, αντί για απλό χ έχουν μια πιο σύνθετη παράσταση του χ

Τέτοιες, σύνθετες, συναρτήσεις έχουν διαφορετικό τρόπο παραγώγισης.

Ας δούμε πως αναφέρονται στο τυπολόγιο, αλλά και πως τις διαχειριζόμαστε στην πράξη

$$\textbf{A. } \left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'_{(x)}$$

Δηλαδή, αν ο εκθέτης του e δεν είναι απλό χ, αλλά κάτι πιο σύνθετο -εδώ συμβολίζεται με f(x)- τότε, **παραγωγίζουμε όπως και την e^{x}**, δηλαδή προκύπτει e στον ίδιο ακριβώς εκθέτη που έχει και πριν την παράγωγο, **μόνο που στο τέλος πολλαπλασιάζουμε με την παράγωγο αυτής της πιο σύνθετης παράστασης του χ (δηλαδή με την f’(x))**

SITE: www.Eclass4U.gr
Τ. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

Παραδείγματα :

$(e^{2x+5})' = e^{2x+5} \cdot (2x+5)' = e^{2x+5} \cdot 2 = 2 \cdot e^{2x+5}$

$(e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-x)' = e^{-x} \cdot (-1) \cdot (x)' = -e^{-x}$

$\left(e^{x^2}\right)' = e^{x^2} \cdot (x^2)' = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x}$

$\left(e^{3x^5-7x+2}\right)' = e^{3x^5-7x^{+2}} \cdot (3x^5-7x+2)' =$

$= e^{3x^5 \cdot 7x+2} \cdot (3 \cdot 5 \cdot x^4 - 7 \cdot 1) = e^{3x^5-7x+2} \cdot (15x^4-7)$

$$\left(e^{\frac{2}{x^2+1}}\right)' = e^{\frac{2}{x^2+1}} \cdot \left(\frac{2}{x^2+1}\right)' = e^{\frac{2}{x^2+1}} \cdot \frac{(2)' \cdot (x^2+1) - 2 \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$= e^{\frac{2}{x^2+1}} \cdot \frac{-2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = e^{\frac{2}{x^2+1}} \cdot \frac{-4 \cdot x}{(x^2+1)^2}$$

$$\left(e^{\frac{x}{2}}\right)' = e^{\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' = e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x)' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}}$$

$$\left(e^{\frac{2}{x}}\right)' = e^{\frac{2}{x}} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)' = e^{\frac{2}{x}} \cdot \frac{(2)' \cdot x - 2 \cdot (x)'}{x^2} = e^{\frac{2}{x}} \cdot \frac{-2}{x^2} = -2 \cdot \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}$$

$$\left(e^{\sqrt{x}}\right)' = e^{\sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

*Χρησιμοποιήσαμε τον τύπο $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ο οποίος δεν υπάρχει στο τυπολόγιό μας, παρόλα αυτά θεωρείται γνωστός και μπορούμε να τον χρησιμοποιούμε κανονικά.

$$\left(e^{2\sqrt{x}+20}\right)' = e^{2\sqrt{x}+20} \cdot \left(2\sqrt{x}+20\right)' = e^{2\sqrt{x}+20} \cdot \left(\left(2\sqrt{x}\right)' + (20)'\right) =$$

$$= e^{2\sqrt{x}+20} \cdot \left(2 \cdot \left(\sqrt{x}\right)'\right) = 2 \cdot e^{2\sqrt{x}+20} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{2\sqrt{x}+20}}{\sqrt{x}}$$

B. $\boldsymbol{(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'_{(x)}}$

Δηλαδή, αν μέσα στο ln δεν έχουμε απλό χ, αλλά κάτι πιο σύνθετο -εδώ συμβολίζεται με f(x)- τότε, **παραγωγίζουμε όπως και την $\ln x$**, δηλαδή προκύπτει κλάσμα με αριθμητή 1 και παρονομαστή την παράσταση που είχαμε μέσα στο ln (δηλαδή την f(x)), **μόνο που στο τέλος πολλαπλασιάζουμε με την παράγωγο αυτής της πιο σύνθετης παράστασης του χ (δηλαδή με την f'(x))**

Παραδείγματα :

$$(\ln(2x+3))' = \frac{1}{2x+3} \cdot (2x+3)' = \frac{1}{2x+3} \cdot ((2x)' + (3)') = \frac{1}{2x+3} \cdot 2 =$$

$$= \frac{2}{2x+3}$$

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) \cdot (x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln(x^2+x))' = \frac{1}{x^2+x} \cdot (x^2+x)' = \frac{1}{x^2+x} \cdot [(x^2)' + (x)'] = \frac{1}{x^2+x} \cdot (2x+1) =$$

$$= \frac{2x+1}{x^2+x}$$

$$\left(\ln\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\frac{1}{\frac{x}{2}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x)' = \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$$

**Ένα κλάσμα που έχει είτε στον αριθμητή είτε στον παρονομαστή είτε και στους δυο, άλλο κλάσμα, λέγεται σύνθετο. Για να κάνουμε το σύνθετο κλάσμα απλό, πολλαπλασιάζουμε άκρους με μέσους όρους, δηλαδή ισχύει*

$$\frac{\frac{\alpha}{b}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha \cdot \delta}{b \cdot \gamma}$$

$$\left(\ln\frac{2}{x}\right)' = \frac{1}{\frac{2}{x}} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)' = \frac{x}{2} \cdot \frac{(2)' \cdot x - 2 \cdot (x)'}{x^2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{-2}{x^2} = \frac{-2x}{2x^2} = -\frac{1}{x}$$

$$(\ln(2x^2 + 5x + 1))' = \frac{1}{2x^2 + 5x + 1}(2x^2 + 5x + 1)' =$$

$$= \frac{1}{2x^2 + 5x + 1}((2x^2)' + (5x)' + (1)') = \frac{1}{2x^2 + 5x + 1} \cdot (2 \cdot 2x + 5) =$$

$$= \frac{4x+5}{2x^2+5x+1}$$

$$\left(\ln(\sqrt{x} + 2)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \cdot \left(\sqrt{x} + 2\right)' = \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \cdot \left(\left(\sqrt{x}\right)' + (2)'\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\left(\sqrt{x} + 2\right) \cdot 2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x} + 2\right)}$$

$$(\ln(e^{2x} + x^2 + 2x))' = \frac{1}{e^{2x} + x^2 + 2x} \cdot (e^{2x} + x^2 + 2x)' =$$

$$= \frac{1}{e^{2x} + x^2 + 2x}[(e^{2x})' + (x^2)' + (2x)'] =$$

$$= \frac{1}{e^{2x} + x^2 + 2x} \cdot \left[e^{2x} \cdot (2x)' + 2x + 2\right] =$$

$$= \frac{1}{e^{2x} + x^2 + 2x} \cdot (2 \cdot e^{2x} + 2x + 2) = \frac{2e^{2x} + 2x + 2}{e^{2x} + x^2 + 2x}$$

$$(\ln(\ln x))' = \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x}$$

Γ. $\left(f^{\nu}_{(x)}\right)' = \nu \cdot f^{\nu-1}_{(x)} \cdot f'_{(x)}$

Δηλαδή, αν η βάση της δύναμης που παραγωγίζουμε δεν είναι απλό χ, αλλά κάτι πιο σύνθετο -εδώ συμβολίζεται με f(x)- τότε, **παραγωγίζουμε όπως και την x^{ν}**, δηλαδή κατεβάζουμε τον εκθέτη μπροστά (συντελεστή) και ξαναγράφουμε την παράσταση που είχαμε σε εκθέτη κατά ένα μικρότερο (ν-1), **μόνο που στο τέλος πολλαπλασιάζουμε με την παράγωγο αυτής της πιο σύνθετης παράστασης του χ (δηλαδή με την f'(x))**

Παραδείγματα

$$((x^4+3x^3)^5)' = 5\cdot(x^4+3x^3)^{5-1}\cdot(x^4+3x^3)' =$$

$$= 5\cdot(x^4+3x^3)^4\cdot[(x^4)'+(3\cdot x^3)'] =$$

$$= 5(x^4+3x^3)^4\cdot(4x^3+3\cdot3\cdot x^2) = 5(x^4+3x^3)^4\cdot(4x^3+9x^2)$$

$$((2x+1)^2)' = 2\cdot(2x+1)^{2-1}\cdot(2x+1)' =$$

$$= 2\cdot(2x+1)\cdot[(2x)'+(1)'] = 2\cdot(2x+1)\cdot2 = 4\cdot(2x+1)$$

$$\left(\left(e^x+x+\frac{1}{x}\right)^3\right)' = 3\cdot\left(e^x+x+\frac{1}{x}\right)^{3-1}\cdot\left(e^x+x+\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= 3\cdot\left(e^x+x+\frac{1}{x}\right)^2\cdot\left[(e^x)'+(x)'+\left(\frac{1}{x}\right)'\right] =$$

$$= 3\cdot\left(e^x+x+\frac{1}{x}\right)^2\cdot[e^x+1+(x^{-1})'] =$$

$$= 3\cdot\left(e^x+x+\frac{1}{x}\right)^2\cdot(e^x+1-1\cdot x^{-1-1}) =$$

$$= 3\cdot\left(e^x+x+\frac{1}{x}\right)^2\cdot(e^x+1-x^{-2}) =$$

$$= 3\cdot\left(e^x+x+\frac{1}{x}\right)^2\cdot\left(e^x+1-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$(x^2+2)^{-2} = -2\cdot(x^2+2)^{-2-1}\cdot(x^2+2)' =$$

$$= -2\cdot(x^2+2)^{-3}\cdot[(x^2)'+(2)'] = -2\cdot\frac{1}{(x^2+2)^3}\cdot2x = \frac{-4x}{(x^2+2)^3}$$

SITE: www.Eclass4U.gr
Τ. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

$2^{ος}$ τρόπος

(αν, δηλαδή, την αρνητική δύναμη την μετατρέψουμε σε κλάσμα)

$$((x^2+2)^{-2})' = \left(\frac{1}{(x^2+2)^2}\right)' = \frac{(1)'\cdot(x^2+2)^2 - 1\cdot[(x^2+2)^2]'}{[(x^2+2)^2]^2} =$$

$$= \frac{-2\cdot(x^2+2)^{2-1}\cdot(x^2+2)'}{(x^2+2)^4} = \frac{2(x^2+2)\cdot 2x}{(x^2+2)^4} = \frac{-4x\cdot(x^2+2)}{(x^2+2)^4} =$$

$$= \frac{-4x}{(x^2+2)^3}$$

$$\left(\left(x^3+3x^2+\frac{1}{2}x+1\right)^3\right)' =$$

$$= 3\cdot\left(x^3+3x^2+\frac{1}{2}x+1\right)^{3-1}\cdot\left(x^3+3x^2+\frac{1}{2}x+1\right)' =$$

$$= 3\cdot\left(x^3+3x^2+\frac{1}{2}x+1\right)^2\cdot\left(3x^2+3\cdot 2x+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 3\cdot\left(x^3+3x^2+\frac{1}{2}x+1\right)^2\cdot\left(3x^2+6x+\frac{1}{2}\right)$$

$$\textbf{Δ. } \left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{f(x)}}\cdot f'_{(x)}$$

Ο τύπος αυτός δεν υπάρχει στο τυπολόγιο, αλλά θεωρείται γνωστός και μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Και πάλι, η λογική παραμένει η ίδια με τις προηγούμενες περιπτώσεις σύνθετων συναρτήσεων. Αν στο υπόριζο (ό,τι βρίσκεται κάτω από την τετραγωνική ρίζα) δεν υπάρχει απλό χ αλλά κάποια πιο σύνθετη παράσταση – την συμβολίζουμε με f(x) – τότε παραγωγίζουμε με βάση τον κανόνα του $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, επομένως προκύπτει κλάσμα με αριθμητή το 1 και παρονομαστή το $2\cdot\sqrt{f(x)}$ και, όπως σε όλες τις άλλες περιπτώσεις σύνθετων συναρτήσεων που είδαμε, **στο τέλος πολλαπλασιάζουμε με την παράγωγο αυτής της πιο σύνθετης παράστασης του χ (δηλαδή με την f'(x))**

Παρόλα αυτά, μπορούμε τις ίδιες παραστάσεις να τις επιλύσουμε μετατρέποντας την ρίζα σε εκθέτη χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\sqrt[\nu]{f(x)^{\mu}} = \left(f(x)\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$ κι ως εκ τούτου, να κάνουμε την παραγώγιση με χρήση του τύπου

$\left(\left(f(x)\right)^{n}\right)' = n\cdot f_{(x)}^{n-1}\cdot f'_{(x)}$ που είδαμε σε προηγούμενα παραδείγματα.

Παραδείγματα

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot (x^2+1)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Εναλλακτικά,

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \left((x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot (x^2+1)^{\frac{1}{2}-1}\cdot (x^2+1)' =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\cdot 2x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\left(\sqrt{e^x+\ln x+x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{e^x+\ln x+x}}\cdot (e^x+\ln x+x)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{e^x+\ln x+x}}\cdot\left(e^x+\frac{1}{x}+1\right)$$

Εναλλακτικά,

$$\left(\sqrt{e^x+\ln x+x}\right)'=\left((e^x+\ln x+x)^{\frac{1}{2}}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(e^x+\ln x+x)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(e^x+\ln x+x)'=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(e^x+\ln x+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot[(e^x)'+(\ln x)'+(x)']=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(e^x+\ln x+x)^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(e^x+\frac{1}{x}+1\right)=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\sqrt{e^x+\ln x+x}}\left(e^x+\frac{1}{x}+1\right)$$

*Παρατηρούμε ότι και με τον εναλλακτικό τρόπο (μετατρέποντας την ρίζα σε εκθέτη) καταλήγουμε στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα, αλλά με περισσότερες πράξεις.

SITE: www.Eclass4U.gr
Τ. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ – ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων

1. $f(x) = e^x - \frac{1}{x^3}$
2. $g(x) = x\ln x + 5x^2$
3. $f(x) = \sqrt{x} \cdot (e^x + \ln x)$
4. $f(x) = \frac{1}{3x^2 - x + 4}$
5. $g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$
6. $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$
7. $g(x) = \sqrt[3]{x}$
8. $f(x) = x^3 \cdot \sqrt{x} \cdot \ln x$
9. $g(x) = \frac{2x^2 - x}{3x^2 + 5}$
10. $h(x) = (x^3 - x) \cdot \ln x$
11. $f(x) = \frac{x^2}{4} - 2x^3 \ln x$

ΛΥΣΕΙΣ

1. $f'_{(x)} = \left(e^x - \frac{1}{x^3}\right)' = (e^x)' - \left(\frac{1}{x^3}\right)' = e^x - (x^{-3})' =$

$$= e^x - (-3) \cdot x^{-3-1} = e^x + 3 \cdot x^{-4} = e^x + 3 \cdot \frac{1}{x^4}$$

2. $g'(x) = (x\ln x + 5x^2)' = (x\ln x)' + (5x^2)' =$

$$= (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' + 5 \cdot (x^2)' =$$
$$= \ln x + x \cdot \frac{1}{x} + 5 \cdot 2 \cdot x = \ln x + 1 + 10x$$

3. $f'(x) = \left(\sqrt{x} \cdot (e^x + \ln x)\right)' = \left(\sqrt{x}\right)' \cdot (e^x + \ln x) + \sqrt{x} \cdot (e^x + \ln x)' =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (e^x + \ln x) + \sqrt{x} \cdot [(e^x)' + (\ln x)'] = \frac{e^x + \ln x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot \left(e^x + \frac{1}{x}\right)$$

4. $f'(x) = \left(\frac{1}{3x^2-x+4}\right)' = \frac{(1)'\cdot(3x^2-x+4)-1\cdot(3x^2-x+4)'}{(3x^2-x+4)^2} =$

$$= \frac{-(3\cdot 2\cdot x-1)}{(3x^2-x+4)^2} = \frac{-6x+1}{(3x^2-x+4)^2}$$

Εναλλακτικά

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3x^2-x+4}\right)' = ((3x^2-x+4)^{-1})' =$$

$$= -1\cdot(3x^2-x+4)^{-1-1}\cdot(3x^2-x+4)' =$$

$$= -(3x^2-x+4)^{-2}\cdot(3\cdot 2\cdot x-1) =$$

$$= -\frac{1}{(3x^2-x+4)^2}(6x-1) = \frac{-(6x-1)}{(3x^2-x+4)^2} = \frac{-6x+1}{(3x^2-x+4)^2}$$

5. $g'(x) = \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = (\sqrt{x})' + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{(1)'\cdot\sqrt{x}-1\cdot(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{x}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

6. $f'(x) = \left(\frac{x^2}{\ln x}\right)' = \frac{(x^2)'\cdot\ln x - x^2\cdot(\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{2\cdot x\cdot\ln x - x^2\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{2\cdot x\cdot\ln x - x}{(\ln x)^2} =$

$$= \frac{x\cdot(2\ln x-1)}{(\ln x)^2}$$

7. $g'(x) = (\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} =$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$$

8. $f'(x) = \left(x^3 \cdot \sqrt{x} \cdot \ln x\right)' = (x^3)' \cdot \left(\sqrt{x}\ln x\right) + x^3 \cdot \left(\sqrt{x}\ln x\right)' =$

$= 3x^2 \cdot \sqrt{x}\ln x + x^3 \cdot \left[\left(\sqrt{x}\right)' \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot (\ln x)'\right] =$

$= 3x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \ln x + x^3 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}\right)$

9. $g'(x) = \left(\frac{2x^2-x}{3x^2+5}\right)' = \frac{(2x^2-x)' \cdot (3x^2+5) - (2x^2-x) \cdot (3x^2+5)'}{(3x^2+5)^2} =$

$= \frac{(4x-1) \cdot (3x^2+5) - (2x^2-x)(6x)}{(3x^2+5)^2} =$

$= \frac{4x \cdot 3x^2 + 4x \cdot 5 - 3x^2 - 5 - (2x^2 \cdot 6x - x \cdot 6x)}{(3x^2+5)^2} =$

$= \frac{12x^3 + 20x - 3x^2 - 5 - 12x^3 + 6x^2}{(3x^2+5)^2} = \frac{3x^2 + 20x - 5}{(3x^2+5)^2}$

10. $h'(x) = \left((x^3 - x) \cdot \ln x\right)' = (x^3 - x)' \cdot \ln x + (x^3 - x) \cdot (\ln x)' =$

$= (3x^2 - 1) \cdot \ln x + (x^3 - x) \cdot \frac{1}{x} = (3x^2 - 1) \cdot \ln x + x(x^2 - 1) \cdot \frac{1}{x} =$

$=(3x^2 - 1) \cdot \ln x + \frac{x \cdot (x^2-1)}{x} = (3x^2 - 1) \cdot \ln x + x^2 - 1$

11. $f'(x) = \left(\frac{x^2}{4} - 2x^3\ln x\right)' = \left(\frac{x^2}{4}\right)' - (2x^3\ln x)' =$

$= \frac{1}{4} \cdot (x^2)' - 2 \cdot (x^3\ln x)' = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot x - 2 \cdot [(x^3)' \cdot \ln x + x^3 \cdot (\ln x)'] =$

$= \frac{1}{2}x - 2 \cdot \left(3x^2 \cdot \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}x - 2 \cdot (3x^2\ln x + x^2) =$

$= \frac{1}{2}x - 2 \cdot x^2(3\ln x + 1)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω παραστάσεων

1. $f(x) = e^{2x^2-1}$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 1}$
3. $g(x) = \sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}$
4. $h(x) = \frac{1}{\ln(x^2+1)}$
5. $f(x) = \frac{2}{x} + e^{x+1} - 7$
6. $k(x) = \ln(x^2 + x + 1)$
7. $k(x) = \ln(x^2 + x + 1)^2$
8. $f(x) = \frac{4x^2+1}{x+2}$
9. $g(x) = 2 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$
10. $h(x) = x \cdot e^{-x}$
11. $k(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$
12. $f(x) = (3x^4 + 4x^3)^{-2}$
13. $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{1 + x^3}$

SITE: www.Eclass4U.gr
Τ. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com