Θεματική ενότητα ΔΕ031

LESSON N.4
[29 /11/2021]

Eclass4U

The best Choice for you

ΘΕΡΜΟΠΥΛΩΝ 17
ΠΕΡΙΣΤΕΡΙ
100Μ ΑΠΟ ΤΗ ΣΤΑΣΗ ΜΕΤΡΟ «ΠΕΡΙΣΤΕΡΙ»

ΤΗΛΕΦΩΝΟ: 210-5711484
ΚΙΝΗΤΟ: 6970401981
EMAIL: grammateia.eclass4u@gmail.com
ΤΟΠΟΘΕΣΙΑ WEB : www.eclass4u.gr
SOCIAL MEDIA:

ΤΙΤΛΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ: Απόδοση & κίνδυνος: αξιογράφου & χαρτοφυλακίου

Καθηγητής:
Κώστας Σολδάτος

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Περιεχόμενα

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Αναμενόμενη Απόδοση αξιόγραφου (Expected Return)

Αναμενόμενη απόδοση είναι ο **σταθμικός μέσος όρος όλων των δυνητικών αποδόσεων** μιας επένδυσης, όπου κάθε δυνητική απόδοση σταθμίζεται από την αντίστοιχη πιθανότητα να συμβεί. Άρα, η αναμενόμενη απόδοση μιας επένδυσης είναι:

$$E_{(r_x)} = \sum_{i=1}^{2} P_i * r_{xi} = P_1 * r_{x1} + P_2 * r_{x2}$$

- P_1: η πιθανότητα να συμβεί η 1η δυνητική απόδοση
- P_2: η πιθανότητα να συμβεί η 2η δυνητική απόδοση
- r_{x1}: η 1η απόδοση του χρεογράφου x
- r_{x2}: η 2η απόδοση του χρεογράφου x

Γενικός τύπος:

$$E(r) = \sum_{i=1}^{n} P_i r_i$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Κίνδυνος & Απόδοση

- Ως κίνδυνο ορίσουμε την **πιθανότητα το πραγματικό αποτέλεσμα από μια επένδυση να διαφέρει από το αναμενόμενο.**

- Γενικά όσο περισσότερα είναι τα πιθανά αποτελέσματα από μία επένδυση τόσο μεγαλύτερος είναι και ο κίνδυνος τον οποίο αυτή ενέχει. **Εάν δεν υπάρχει διασπορά** των πιθανών αποτελεσμάτων μιας επένδυσης γύρω από το αναμενόμενο, **δεν υπάρχει και κίνδυνος**.

- Επομένως ο κίνδυνος μιας επένδυσης ορίζεται ως **ο βαθμός μεταβολής των πιθανών αποδόσεων γύρω από την αναμενόμενη απόδοση.**

- Ή μεταβλητότητα (variability) των δυνητικών αποτελεσμάτων γύρω από την αναμενόμενη τιμή τους ή τον αριθμητικό τους μέσο.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Κίνδυνος (τυπική απόκλιση): αν έχω δείγμα και **<u>όχι</u>** πληθυσμό

Ένα από τα πλέον δημοφιλή **στατιστικά μέτρα της διασποράς των δυνητικών αποτελεσμάτων γύρω από την αναμενόμενη τιμή τους είναι η τυπική** απόκλιση ή μέση απόκλιση τετραγώνου (standard deviation).

Κατά συνέπεια, η **τυπική απόκλιση είναι ένα μέτρο του συνολικού κινδύνου** ενός περιουσιακού στοιχείου ή ενός χαρτοφυλακίου και υπολογίζεται από τον τύπο (έστω ότι έχουμε n=2 αποδόσεις):

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{(r_1 - \bar{r})^2 + (r_2 - \bar{r})^2}{n-1}}$$

- s= η τυπική απόκλιση των αποδόσεων
- r_i= η κάθε απόδοση i του δείγματος
- $\bar{r}$= η μέση απόδοση (μέσος όρος αποδόσεων που χρησιμοποιούνται)
- n= ο αριθμός των αποδόσεων του δείγματος

ή γενικός τύπος βιβλίου: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r})^2}{n-1}}$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com
eclass4U.gr

Κίνδυνος (τυπική απόκλιση) ενός αξιόγραφου αν έχω πληθυσμό

Eclass4U
The best Choice for you

- Σε περίπτωση που εξετάζουμε πραγματικές και όχι αναμενόμενες αποδόσεις (δηλαδή τα αποτελέσματα δεν έχουν κάποιο συντελεστή βαρύτητας) τότε στον τύπο του κινδύνου αντί για αναμενόμενη απόδοση E(r) έχω τον μέσο όρο $\bar{r}$ των αποδόσεων (έστω ότι έχουμε n=2 αποδόσεις):
- $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{(r_1 - \overline{r})^2 + (r_2 - \overline{r})^2}{n}}$
- s= η τυπική απόκλιση των αποδόσεων
- r_i= η παρατηρούμενη απόδοση i
- $\bar{r}$= η μέση απόδοση (μέσος όρος αποδόσεων που χρησιμοποιούνται)
- n= ο αριθμός των αποδόσεων
- ή γενικός τύπος βιβλίου: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r})^2}{n}}$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Κίνδυνος δείγματος και πληθυσμού

Αν εξετάζω δείγμα τότε διαιρώ με n-1 και η τυπική απόκλιση συμβολίζεται με s.

Αν εξετάζω πληθυσμό τότε διαιρώ με n και η τυπική απόκλιση συμβολίζεται με σ.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Κίνδυνος (τυπική απόκλιση) ενός αξιόγραφου: αν έχω πιθανότητα

Κίνδυνος είναι τη μεταβλητότητα των δυνητικών αποτελεσμάτων γύρω από την αναμενόμενη τιμή τους. Επιπλέον, ένα στατιστικό μέτρο της διασποράς των δυνητικών αποτελεσμάτων γύρω από την αναμενόμενη τιμή τους είναι η τυπική απόκλιση (και η διακύμανση). Άρα, η τυπική απόκλιση σ των αναμενόμενων αποδόσεων ενός αξιογράφου δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_x = \sqrt{{\sigma_x}^2}$$

Αν π.χ. έχουμε δύο πιθανές αποδόσεις r του αξιογράφου x:

$${\sigma_x}^2 = \sum_{i=1}^{2} P_i (r_{xi} - E_{(r_x)})^2 = P_1 (r_{x1} - E_{(r_x)})^2 + P_2 (r_{x2} - E_{(r_x)})^2$$

Γενικός τύπος βιβλίου:

$$\sigma = \left\{ \sum_{i=1}^{n} P_i [r_i - \mathrm{E}(r)]^2 \right\}^{1/2}$$

όπου σ = η τυπική απόκλιση των αναμενόμενων αποδόσεων ενός αξιογράφου, P_i = η πιθανότητα να συμβεί η i δυνητική απόδοση του αξιογράφου, r_i = η i δυνητική απόδοση του αξιογράφου, E(r) = η αναμενόμενη ή προσδοκώμενη απόδοση του αξιογράφου και n= ο αριθμός των δυνητικών αποδόσεων.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Παράδειγμα 1 Δ τόμου

Ένας επενδυτής έκανε μία επένδυση 1.000 δρχ. το 1997, η οποία είχε την εξέλιξη που εμφανίζεται στον παρακάτω πίνακα. Να υπολογίσετε τον κίνδυνο στον οποίο ήταν εκτεθειμένος ο επενδυτής.

Έτος	Αρχική αξία	Τελική αξία	HPR	HPY
1997	1.000	1.100	1,10	0,10
1998	1.100	1.320	1,20	0,20
1999	1.320	1.122	0,85	−0,15

Λύση:
Ο κίνδυνος προκύπτει από τον τύπο:

$$s = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{(n-1)}\right]^{1/2}$$

Πρώτα όμως θα υπολογίσουμε τη μέση απόδοση HPY

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Παράδειγμα 1 Δ τόμου

Απάντηση:

Ο αριθμητικός μέσος είναι το άθροισμα των αποδόσεων που εξετάζονται, διαιρούμενο δια τον συνολικό αριθμό τους. Άρα, $AM = \sum HPY / n \Rightarrow$

$$AM = [(0,10)+(0,20)+(-0,15)]/3 = 0,15/3 = 0,05 \text{ ή } 5\% \text{ ετησίως.}$$

Έτος	HPY	HPY-AM	$(HPY\text{-}AM)^2$
1997	0,10	0,05	0,0025
1998	0,20	0,15	0,0225
1999	–0,15	–0,20	0,0400
	AM = 0,05		Άθροισμα = 0,0650

$$\sum(X-\overline{X})^2 = \sum(HPY - AM)^2 = 0,0650$$

$$s = [\,0,0650/2\,]^{1/2} = 0,1803 \text{ ή } 18,03\%.$$

Eclass4U
The best Choice for you

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Παράδειγμα 2 Δ τόμου

Παράδειγμα 2

Ένας επενδυτής εξετάζει μία επένδυση. Ο επενδυτής υπολογίζει ότι υπάρχει 25% πιθανότητα η επένδυση αυτή να του αποδώσει 15%, 50% πιθανότητα να του αποδώσει 10% και 25% πιθανότητα να του αποδώσει 5%. Ποια είναι η αναμενόμενη απόδοση του επενδυτή από αυτή την επένδυση;

Απάντηση: Η αναμενόμενη απόδοση του επενδυτή είναι:

$E(r) = (0{,}25 \times 0{,}15) + (0{,}50 \times 0{,}10) + (0{,}25 \times 0{,}05) = 0{,}10$ ή 10%.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Παράδειγμα 3 Δ τόμου

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του παραδείγματος 2 αυτού του κεφαλαίου, να υπολογίσετε τον κίνδυνο στον οποίο θα είναι εκτεθειμένος ο επενδυτής.

Απάντηση:

(P)	(HPY ή r)	(P)×(r)	HPY-E(r)	[HPY-E(r)]^2	(P)[HPY-E(r)]^2
0,25	0,15	0,0375	0,0500	0,0025	0,0006
0,50	0,10	0,0500	–0,0000	0,0000	0,0000
0,25	0,05	0,0125	–0,0500	0,0025	0,0006
		E(r) = 0,1000			Άθροισμα = 0,0012

Αναμενόμενη απόδοση: [E(r)] = (0,25×0,15) + (0,50×0,10) + (0,25×0,05) = 0,10 ή 10%.

Διακύμανση: (σ^2) = $\sum$ (P)×[HPY – E(r)]^2 = 0,0012

Τυπική απόκλιση: (σ) ={ $\sum$ (P)×[HPY×E(r)]^2 }$^{1/2}$ = {0,0012}$^{1/2}$ = 0,0346 ή 3,46%

Επομένως, η απόδοση την οποία αναμένει ο επενδυτής από την επένδυσή του είναι 10% και ο κίνδυνος τον οποίο εκτιμά ο επενδυτής ότι ενέχει η επένδυση αυτή (δηλαδή η τυπική απόκλιση των πιθανών αποδόσεων από την αναμενόμενη τιμή τους) είναι 3,46%.

Λύση:

Ο κίνδυνος προκύπτει από τον τύπο:

$$\sigma = \left\{ \sum_{i=1}^{n} P_i [r_i - E(r)]^2 \right\}^{1/2}$$

Έχουμε υπολογίσει την αναμενόμενη απόδοση

E(r) = (0,25×0,15) + (0,50×0,10)+(0,25×0,05) = 0,10 ή 10%.

$$\sigma^2 = 0{,}25 * (0{,}15 - 0{,}10)^2 + 0{,}50 * (0{,}10 - 0{,}10)^2 + 0{,}25 * (0{,}05 - 0{,}10)^2 = 0{,}0012$$

Οπότε:

σ= $\sqrt{0{,}0012} = 0{,}0346$ ή 3,46%

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com
eclass4U

2 Κατηγορίες Κινδύνων (sos)

- **1. Στον συστηματικό κίνδυνο (systematic risk) ή κίνδυνος της αγοράς (market risk)**
- Είναι ο κίνδυνος της επένδυσης ο οποίος συσχετίζεται με την συνολική αγορά και ο οποίος **δεν μπορεί να εξαλειφθεί με την διαφοροποίηση** του χαρτοφυλακίου. Ο κίνδυνος αυτός **οφείλεται σε δυνάμεις της αγοράς** που είναι ανεξάρτητες από την κάθε ξεχωριστή επένδυση που περιέρχεται στο χαρτοφυλάκιο του επενδυτή. Στην κατηγορία αυτή μπορούμε να πούμε ότι περιλαμβάνεται **ο κίνδυνος των επιτοκίων**, **ο κίνδυνος της αγοράς**, ο **κίνδυνος του πληθωρισμού**.
- **2. Στο μη συστηματικό κίνδυνο (unsystematic risk)**
- Είναι εκείνος ο κίνδυνος που οφείλεται **σε λόγους ιδιαίτερους για την κάθε ξεχωριστή επένδυση** και επομένως **μπορεί να εξαλειφθεί με την διαφοροποίηση** του χαρτοφυλακίου. Στην κατηγορία αυτή περιλαμβάνεται ο **επιχειρηματικός κίνδυνος, ο χρηματοοικονομικός κίνδυνος και ο κίνδυνος ρευστότητας.**
- **3. Συνολικός Κίνδυνος= Συστηματικός Κίνδυνος + Μη Συστηματικό Κίνδυνο**

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Συντελεστής μεταβλητότητας (Coefficient of Variation – CV): Σχετική μέτρηση του κινδύνου

- Ο **συντελεστής μεταβλητότητας** Coefficient of Variation – **CV μετρά τον κίνδυνο ανά μονάδα αναμενόμενης απόδοσης** και καθορίζεται από το πηλίκο της διαίρεσης της τυπικής απόκλισης δια την αναμενόμενη απόδοση:

$$CV = \sigma / E(r)$$

- Ο CV **χρησιμοποιείται** στις περιπτώσεις που οι επενδυτές **θέλουν να συγκρίνουν τον κίνδυνο επενδύσεων αλλά οι αναμενόμενες αποδόσεις τους παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές**.
- Σε αυτές τις περιπτώσεις, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση είναι απόλυτες μετρήσεις της διασποράς και μπορεί να οδηγήσουν σε εσφαλμένα συμπεράσματα
- Στην περίπτωση που έχουμε έναν ορθολογικό επενδυτή ενώπιον πχ δύο επενδύσεων και η μία του δίνει υψηλότερη απόδοση ενώ η άλλη του δίνει χαμηλότερο κίνδυνο.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Άσκηση

- Ένας επενδυτής θέλει να αγοράσει μια από τις δυο μετοχές ποια θα πρέπει να διαλέξει ;

Δυνητική απόδοση μετοχής Α	Πιθανότητα	Δυνητική απόδοση μετοχής Β	Πιθανότητα
0,40	0,80	0,10	0,40
0,30	0,20	0,15	0,60

Λύση:

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Άσκηση

Δυνητική απόδοση μετοχής Α	Πιθανότητα	Δυνητική απόδοση μετοχής Β	Πιθανότητα
0,40	0,80	0,10	0,40
0,30	0,20	0,15	0,60

Υπολογισμός Αναμενόμενης Απόδοσης: $E(r) = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot P_i$

Οπότε: $E(r_A) = (0{,}40 \cdot 0{,}80) + (0{,}30 \cdot 0{,}20) = 0{,}38$ και $E(r_B) = (0{,}10 \cdot 0{,}40) + (0{,}15 \cdot 0{,}60) = 0{,}13$

Υπολογισμός Κινδύνου: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ και $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(r_i - E(r)\right)^2 \cdot P_i$

Οπότε: $\sigma_A^2 = (0{,}40 - 0{,}38)^2 0{,}8 + (0{,}30 - 0{,}38)^2 0{,}2 = 0{,}00032 + 0{,}00128 = 0{,}0016$

Άρα: $\sigma_A = \sqrt{\sigma_A^2} = \sqrt{0{,}0016} = 0{,}04$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος eclass4U.gr
costas.eclass4u@gmail.com

Επίσης: $\sigma_B^2 = (0,10-0,13)^2 0,4 + (0,15-0,13)^2 0,6 = 0,00036 + 0,00024 = 0,0006$

Άρα: $\sigma_B = \sqrt{\sigma_B^2} = \sqrt{0,0006} = 0,0245$

Επένδυση	E(R)	σ
A	0,38	0,04
B	0,13	0,0245

Δυνητική απόδοση μετοχής Α	Πιθανότητα	Δυνητική απόδοση μετοχής Β	Πιθανότητα
0,40	0,80	0,10	0,40
0,30	0,20	0,15	0,60

Βάσει της αναμενόμενης απόδοσης θα επιλέξουμε την επένδυση με τη μεγαλύτερη προσδοκώμενη απόδοση, την επένδυση Α ενώ βάσει του κριτηρίου του κινδύνου θα επιλέξουμε την επένδυση με τη μικρότερη τυπική απόκλιση την επένδυση Β.

Επένδυση Α

$$CV_A = \frac{\sigma_A}{E(r_A)} = \frac{0,04}{0,38} = 0,105$$

Επένδυση Β

$$CV_B = \frac{\sigma_B}{E(r_B)} = \frac{0,0245}{0,13} = 0,1885$$

Ο επενδυτής βάσει του συντελεστή μεταβλητότητας θα διαλέξει την επένδυση Α γιατί έχει μικρότερη διασπορά κίνδυνου ανά μονάδα αναμενομένης απόδοσης σε σχέση με την επένδυση Β

Θεωρία χαρτοφυλακίου (portfolio theory)

- **Η Θεωρία χαρτοφυλακίου (portfolio theory)** αναφέρεται στον τρόπο δημιουργίας του χαρτοφυλακίου ενός επενδυτή, δηλαδή στον συνδυασμό των περιουσιακών στοιχείων (assets) που έχει επενδύσει και κατέχει ένας επενδυτής.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Αναμενόμενη Απόδοση αξιόγραφου (Expected Return) Είδαμε ότι:

Αναμενόμενη απόδοση είναι ο **σταθμικός μέσος όρος όλων των δυνητικών αποδόσεων** μιας επένδυσης, όπου κάθε δυνητική απόδοση σταθμίζεται από την αντίστοιχη πιθανότητα να συμβεί. Άρα, η αναμενόμενη απόδοση μιας επένδυσης είναι:

$$E_{(r_x)} = \sum_{i=1}^{2} P_i * r_{xi} = P_1 * r_{x1} + P_2 * r_{x2}$$

- P_1: η πιθανότητα να συμβεί η 1η δυνητική απόδοση
- P_2: η πιθανότητα να συμβεί η 2η δυνητική απόδοση
- r_{x1}: η 1η απόδοση του χρεογράφου x
- r_{x2}: η 2η απόδοση του χρεογράφου x

Γενικός τύπος:

$$\mathrm{E}(r) = \sum_{i=1}^{n} P_i r_i$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Αναμενόμενη απόδοση ενός χαρτοφυλακίου

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot E(R_i) = w_1 \cdot E(R_1) + w_2 \cdot E(R_2) + \ldots + w_n \cdot E(R_n)$$

$E(R_p)$: η προσδοκώμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου.

w_i: *το ποσοστό των επενδυμένων κεφαλαίων στο χρεόγραφο i ως προς τη συνολική αξία του χαρτοφυλακίου.*

$E(R_i)$: *η προσδοκώμενη απόδοση του i χρεογράφου.*

n : το *σύνολο των επενδύσεων που περιλαμβάνονται στο χαρτοφυλάκιο.*

Το άθροισμα των ποσοστών των επιμέρους επενδύσεων του χαρτοφυλακίου θα πρέπει να είναι **ίσο με 1. Δηλαδή:** $\sum_{i=1}^{n} w_i = w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 1$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Αναμενόμενη απόδοση ενός χαρτοφυλακίου

Η αναμενόμενη απόδοση ενός χαρτοφυλακίου είναι ο σταθμικός μέσος όρος των αναμενόμενων αποδόσεων των αξιόγραφων που περιλαμβάνει το χαρτοφυλάκιο

Γενικός τύπος βιβλίου:

$$E(R_p) = \overline{R}_p = \sum_{i=1}^{N} w_i E(R_i)$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Κίνδυνος (τυπική απόκλιση) ενός αξιόγραφου: αν έχω πιθανότητα Είδαμε ότι:

Κίνδυνος είναι τη μεταβλητότητα των δυνητικών αποτελεσμάτων γύρω από την αναμενόμενη τιμή τους. Επιπλέον, ένα στατιστικό μέτρο της διασποράς των δυνητικών αποτελεσμάτων γύρω από την αναμενόμενη τιμή τους είναι η τυπική απόκλιση (και η διακύμανση). Άρα, η τυπική απόκλιση σ των αναμενόμενων αποδόσεων ενός αξιογράφου δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_x = \sqrt{{\sigma_x}^2}$$

Αν π.χ. έχουμε δύο πιθανές αποδόσεις r του αξιογράφου x:

$${\sigma_x}^2 = \sum_{i=1}^{2} P_i (r_{xi} - E_{(r_x)})^2 = P_1 (r_{x1} - E_{(r_x)})^2 + P_2 (r_{x2} - E_{(r_x)})^2$$

Γενικός τύπος βιβλίου:

$$\sigma = \left\{ \sum_{i=1}^{n} P_i [r_i - \mathrm{E}(r)]^2 \right\}^{1/2}$$

όπου σ = η τυπική απόκλιση των αναμενόμενων αποδόσεων ενός αξιογράφου, P_i = η πιθανότητα να συμβεί η i δυνητική απόδοση του αξιογράφου, r_i = η i δυνητική απόδοση του αξιογράφου, E(r) = η αναμενόμενη ή προσδοκώμενη απόδοση του αξιογράφου και n= ο αριθμός των δυνητικών αποδόσεων.

Κίνδυνος Χαρτοφυλακίου

- Ο **κίνδυνος ενός χαρτοφυλακίου** είναι ο κίνδυνός που έχει κάθε μεμονωμένο αξιόγραφο του χαρτοφυλακίου δηλαδή της τυπικής απόκλισης των αναμενομένων αποδόσεων του, καθώς επίσης των αναμενόμενων αποδόσεων των αξιογράφων του χαρτοφυλακίου.

- Η **συν διακύμανση** είναι το μέτρο εκείνο που δείχνει αν τα αξιόγραφα κινούνται μαζί σε σχέση με τις αναμενόμενες τιμές τους, εξετάζοντας τις αποδόσεις τους.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Κίνδυνος χαρτοφυλακίου με δύο αξιόγραφα

Eclass4U
The best Choice for you

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \cdot \sigma_1^2 + w_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot COV(R_1, R_2)$$

w_1: το ποσοστό του κεφαλαίου που έχει επενδυθεί στο χρεόγραφο 1

w_2: το ποσοστό του κεφαλαίου που έχει επενδυθεί στο χρεόγραφο 2

$cov(R_1, R_2)$: η συνδιακύμανση των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου

Χρησιμοποιείται (η τυπική απόκλιση των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου) για να μετρήσει τον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Συνδιακύμανση σij ή Cov (Covariance) των Αποδόσεων του Χαρτοφυλακίου

$$COV(R_1,R_2) = \sigma_{1,2} = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{1,2} \quad \text{και} \quad COV(R_1,R_2) = \sum P_i \cdot [R_{1i} - E(R_1)] \cdot [R_{2i} - E(R_2)]$$

$\rho_{1,2}$: ο συντελεστής συσχέτισης των αποδόσεων των χρεογράφων Α και Β.

P_i : η πιθανότητα τα επενδυτικά στοιχεία να έχουν μια συγκεκριμένη τιμή, να συμβεί η δυνητική απόδοση του καθενός αξιόγραφου.

Χρησιμοποιείται για να μετρήσει μέχρι ποιο σημείο οι αναμενόμενες αποδόσεις των επενδύσεων στο χαρτοφυλάκιο αλληλεξαρτώνται ή αλληλοεπηρεάζονται.

Η συνδιακύμανση των αποδόσεων των επενδύσεων στο χαρτοφυλάκιο μετρά την ομοιότητα ή την ανομοιότητα στη συμπεριφορά των αποδόσεων.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Συνδιακύμανση σ_{ij} ή Cov (Covariance)

Η συνδιακύμανση είναι ένα απόλυτο μέτρο του βαθμού με τον οποίο δύο μεταβλητές «κινούνται μαζί» (σε σχέση με τις αναμενόμενες τιμές τους), διαχρονικά.

Στη θεωρία χαρτοφυλακίου οι μεταβλητές για τις οποίες ενδιαφερόμαστε είναι συνήθως οι αποδόσεις των αξιόγραφων. Έστω, π.χ., ότι εξετάζουμε τις αποδόσεις δύο αξιογράφων για κάποιο χρονικό διάστημα και ότι η συνδιακύμανση των αποδόσεών τους βρέθηκε να είναι ίση με 4,5. 0 αριθμός αυτός μπορεί να σημαίνει ότι υπάρχει μία μεγάλη θετική σχέση μεταξύ των αποδόσεων των δύο αξιογράφων, εάν οι δύο αυτές σειρές των αποδόσεων έχουν μεγάλη σταθερότητα.

Αντίθετα, ο αριθμός αυτός μπορεί να δηλώνει ότι υπάρχει μία αδύναμη θετική σχέση μεταξύ των αποδόσεων των δύο αξιογράφων, εάν οι δύο αυτές σειρές των αποδόσεων έχουν μεγάλη μεταβλητότητα.

Για τον λόγο αυτό, είναι προτιμότερο να «τυποποιήσουμε» τη συνδιακύμανση, διαιρώντας την διά το γινόμενο των τυπικών αποκλίσεων των αποδόσεων των δύο αξιογράφων. Στην περίπτωση αυτή λαμβάνουμε τον συντελεστή συσχέτισης ρ (correlation coefficient) των αποδόσεων των δύο αξιογράφων, ο οποίος είναι ίσος με:

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Συντελεστής συσχέτισης ρ των Αποδόσεων του Χαρτοφυλακίου

- Τύπος συντελεστή συσχέτισης $\rho_{1,2} = \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_1 * \sigma_2}$
- Χρησιμοποιείται για να μετρήσει τη συσχέτιση δηλαδή **το βαθμό στον οποίο οι αποδόσεις των επενδύσεων κινούνται μαζί**.
- 1. Όταν ο συντελεστής συσχέτισης είναι θετικός δηλ.$\boldsymbol{\rho_{1,2} > 0}$ τότε όταν **αυξάνεται** η
- απόδοση **του ενός επενδυτικού** στοιχείου **θα αυξάνεται** και η **απόδοση του άλλου** και αντίστροφα.
- 2. Όταν ο συντελεστής συσχέτισης είναι ίσος με τη μονάδα δηλ.$\boldsymbol{\rho_{1,2} = 1}$ τότε ό**σο**
- **αυξάνεται** η απόδοση **του ενός επενδυτικού** στοιχείου **θα αυξάνεται και η απόδοση του άλλου** και αντίστροφα (πλήρης θετική συσχέτιση).

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Συντελεστής συσχέτισης ρ των Αποδόσεων του Χαρτοφυλακίου

- 3. Όταν ο συντελεστής συσχέτισης είναι αρνητικός δηλ. $\boldsymbol{\rho_{1,2} < 0}$ τότε **όταν αυξάνεται** η απόδοση του ενός επενδυτικού στοιχείου **θα μειώνεται** και η απόδοση του άλλου και αντίστροφα.

- 4. Όταν ο συντελεστής συσχέτισης είναι $\rho_{1,2} = -1$ τότε **όσο αυξάνεται** η απόδοση του ενός επενδυτικού στοιχείου **τόσο θα μειώνεται** και η απόδοση του άλλου και αντίστροφα (πλήρης αρνητική συσχέτιση).

- 5. Όταν ο συντελεστής συσχέτισης είναι **μηδενικός** δηλ. $\rho_{1,2} = 0$ **τότε δεν υπάρχει καμία συσχέτιση** των αποδόσεων μεταξύ των επενδύσεων που απαρτίζουν το χαρτοφυλάκιο

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Συντελεστής συσχέτισης ρ των Αποδόσεων του Χαρτοφυλακίου

- οι τιμές που μπορεί να λάβει ο συντελεστής συσχέτισης κυμαίνονται μεταξύ
- $-1 \leq p \leq +1$.
- Όσο πιο μικροί είναι οι συντελεστές τόσο πιο βέβαιη (σταθερή) είναι η απόδοση του χαρτοφυλακίου.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Συντελεστής συσχέτισης ρ

- **Παράδειγμα:**
- Έστω ο συντελεστής συσχέτισης P_{AB} = 0,1333 δηλαδή είναι θετικός και κοντά στο μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια ασθενής θετική συσχέτιση μεταξύ των αποδόσεων των μετοχών Α και Β του χαρτοφυλακίου και άρα μια μικρή έστω διαφοροποίηση.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Διαφοροποίηση & Συσχέτιση

Η διαφοροποίηση γίνεται πιο αποτελεσματική όσο η συσχέτιση ανάμεσα στις αποδόσεις των χρεογράφων μικραίνει και πλησιάζει το -1

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Μέτρηση της Διαφοροποίησης Ενός Χαρτοφυλακίου

- Η διαφοροποίηση ενός χαρτοφυλακίου μετράται με τη **συσχέτιση** που έχουν **οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου με τις αποδόσεις του δείκτη της αγοράς**, η οποία **μπορεί να υπολογιστεί από το συντελεστή προσδιορισμού R^2, που είναι το τετράγωνο του συντελεστή συσχέτισης ρ**.

- Ο R^2 καθορίζει το ποσοστό της συνολικής διακύμανσης των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου, η οποία εξηγείται από τις μεταβολές των αποδόσεων του δείκτη**. Λαμβάνει τιμές στο διάστημα [0, 1]. Όταν το χαρτοφυλάκιο είναι πλήρως διαφοροποιημένο, τότε προσεγγίζει τη μονάδα**.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Κίνδυνος Χαρτοφυλακίου με Δυο Αξιόγραφα

Η πιο απλή περίπτωση είναι το εξεταζόμενο χαρτοφυλάκιο να περιλαμβάνει μόνο δυο αξιόγραφα (το 1 και το 2). Στην περίπτωση αυτή, ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου γράφεται ως εξής:

$$\sigma_\rho{}^2 = w_x^2 * \sigma_x{}^2 + w_y^2 * \sigma_y{}^2 + 2 * w_x * w_y * COV(r_x, r_y)$$

Η συνδιακύμανση των δύο αξιογράφων δίνεται από τον τύπο:

$$\sigma_{xy} \; \eta' \; COV(r_x, r_y) = \sum_{i=1}^{n} P_i\left(r_{xi} - E_{(r_x)}\right) * \left(r_{yi} - E_{(r_y)}\right)$$

Κίνδυνος Χαρτοφυλακίου με Τρία Αξιόγραφα

Η διακύμανση των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου όταν εκείνο αποτελείται από τρία περιουσιακά στοιχεία δίνεται από την σχέση:

$$\sigma_p^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + w_\Gamma^2\sigma_\Gamma^2 + 2w_A w_B \sigma_{AB} + 2w_A w_\Gamma \sigma_{A\Gamma} + 2w_B w_\Gamma \sigma_{B\Gamma}$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Ο κίνδυνός του χαρτοφυλακίου εξαρτάται από :

- Τον **κίνδυνο των επιμέρους επενδύσεων** που αποτελούν το χαρτοφυλάκιο δηλαδή την αβεβαιότητα των διακυμάνσεων των αποδόσεων της κάθε μετοχής
- Το **ποσοστό συμμέτοχης κάθε επένδυσης** στην συνολική αξία του χαρτοφυλακίου w
- Την **αλληλεπίδραση του κίνδυνου** μέσω των συν διακυμάνσεων των αποδόσεων επενδύσεων που υπάρχουν στο χαρτοφυλάκιο.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Άσκηση 1

Έστω ότι το χαρτοφυλάκιο μας αποτελείται από την μετοχή Α κατά 60% και κατά την μετοχή Β κατά 40%. Να υπολογισθεί κίνδυνός του χαρτοφυλακίου αν ο συντελεστής συσχέτισης είναι 0,9 καθώς και η απόδοση του χαρτοφυλακίου.

ΜΕΤΟΧΕΣ	Αναμενόμενη απόδοση	Διακύμανση
Α	0,30	0,0625
Β	0,50	0,09

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Άσκηση 1

Μεθοδολογια

- Υπολογίζουμε την **αναμενόμενη απόδοση** του χαρτοφυλακίου.
- Βρίσκουμε τη **συνδιακύμανση των αποδόσεων των δύο μετοχών** και κατόπιν τη **διακύμανση του χαρτοφυλακίου.**
- Υπολογίζουμε κατόπιν την **τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου** (κίνδυνος).

ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ (ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΗ) ΑΠΟΔΟΣΗ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot E(R_i)$$

$$E(R_p) = w_A \cdot E(R_A) + w_B \cdot E(R_B) = 0{,}60 \cdot 0{,}30 + 0{,}40 \cdot 0{,}50 = 0{,}38$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ ΤΟΥ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

$$COV(R_A, R_B) = \sigma_{AB} = \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB}$$

$$COV(R_A, R_B) = 0{,}25 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}0675$$

ΚΙΝΔΥΝΟΣ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

Για να βρούμε τον κίνδυνο του παραπάνω χαρτοφυλακίου βρίσκουμε την τυπική απόκλιση:

$$\sigma_p^2 = w_A^2 \cdot \sigma_A^2 + w_B^2 \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot w_A \cdot w_B \cdot COV(R_A, R_B)$$

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B \sigma_{AB}} = \sqrt{(0{,}6)^2 \cdot 0{,}0625 + (0{,}4)^2 \cdot 0{,}09 + 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}0675}$$

$$= \sqrt{0{,}0693} = 0{,}263$$

Άσκηση 2

Ένας επενδυτής εξετάζει δύο επενδύσεις :

Επένδυση Α	Δυνητική απόδοση	Πιθανότητα
	0,20	0,60
	0,30	0,40
Επένδυση Β	**Δυνητική απόδοση**	**Πιθανότητα**
	0,30	0,60
	0,05	0,40

(α) Να υπολογιστεί η προσδοκώμενη απόδοση κάθε επένδυσης και ο κίνδυνος καθεμίας επένδυσης.

(β) Αν θέλαμε να δημιουργήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο με ποσοστό συμμετοχής της επένδυσης Α 50% και της Β 50% να βρεθεί η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου καθώς κι ο αντίστοιχος κίνδυνός του.

(γ) Βρείτε το συντελεστή συσχέτισης των αποδόσεων των δύο επενδυτικών στοιχείων. Τι δείχνει αυτός ο συντελεστής;

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Άσκηση 2

Λύση

Μεθοδολογια

- Υπολογίζουμε την αναμενόμενη απόδοση κάθε επένδυσης.
- Βρίσκουμε τον κίνδυνο (τυπική απόκλιση) κάθε επένδυσης αφού υπολογίσουμε πρώτα τη διακύμανση.
- Στη συνέχεια έχοντας υπολογίσει τις αναμενόμενες αποδόσεις καθεμίας επένδυσης μετράμε την προσδοκώμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου.
- Υπολογίζουμε κατόπιν την τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου (κίνδυνος)
- Τέλος βρίσκουμε το συντελεστή συσχέτισης των αποδόσεων.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Άσκηση 2

(α) Να υπολογιστεί η προσδοκώμενη απόδοση κάθε επένδυσης και ο κίνδυνος καθεμίας επένδυσης.

$$E(r) = \sum_{i=1}^{n} R_i \cdot P_i$$

Επένδυση Α	Δυνητική απόδοση	Πιθανότητα
	0,20	0,60
	0,30	0,40
Επένδυση Β	Δυνητική απόδοση	Πιθανότητα
	0,30	0,60
	0,05	0,40

Επομένως, η προσδοκώμενη απόδοση της επένδυση Α και Β είναι αντίστοιχα:

$$E(R_A) = (0{,}20 * 0{,}60) + (0{,}30 * 0{,}40) \Leftrightarrow E(R_A) = 0{,}24$$

$$E(R_B) = (0{,}30 * 0{,}60) + (0{,}05 * 0{,}40) \Leftrightarrow E(R_{\mathrm{B}}) = 0{,}20$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Άσκηση 2

Επένδυση Α	Δυνητική απόδοση	Πιθανότητα
	0,20	0,60
	0,30	0,40
Επένδυση Β	Δυνητική απόδοση	Πιθανότητα
	0,30	0,60
	0,05	0,40

- Ο κίνδυνος ενός αξιογράφου δίνεται από:

$$\sigma = \left\{ \sum_{i=1}^{n} P_i [r_i - E(r)]^2 \right\}^{1/2} \qquad (6.2)$$

- Συνεπώς, ο κίνδυνος της επένδυση Α και Β είναι αντίστοιχα:

$$\sigma_A^2 = (0{,}20 - 0{,}24)^2 \, 0{,}60 + (0{,}30 - 0{,}24)^2 \, 0{,}40 = 0{,}0024$$

$$\sigma_A = \sqrt{\sigma_A^2} = \sqrt{0{,}0024} = 0{,}049$$

$$\sigma_B^2 = (0{,}30 - 0{,}20)^2 \cdot 0{,}60 + (0{,}05 - 0{,}20)^2 \cdot 0{,}40 = 0{,}006 + 0{,}009 = 0{,}015$$

$$\sigma_B = \sqrt{\sigma_B^2} = \sqrt{0{,}015} = 0{,}1225$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Άσκηση 2

(β) Αν θέλαμε να δημιουργήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο με ποσοστό συμμετοχής της επένδυσης Α 50% και της Β 50% να βρεθεί η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου καθώς κι ο αντίστοιχος κίνδυνός του.

Λύση:

Η Αναμενόμενη απόδοση ενός χαρτοφυλακίου δίνεται από:

$$\mathrm{E}(R_p) = \overline{R_p} = \sum_{i=1}^{N} w_i\, E(R_i) \qquad (6.3)$$

$$E(R_p) = w_A \cdot E(R_A) + w_B \cdot E(R_B) = 0{,}50 \cdot 0{,}24 + 0{,}50 \cdot 0{,}20 = 0{,}22$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Άσκηση 2

- Για να υπολογίσω τον κίνδυνο (τυπική απόκλιση σ) θα υπολογίσω πρώτα τη διακύμανση σ^2:

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \cdot \sigma_1^2 + w_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot COV(R_1, R_2)$$

Επένδυση Α	Δυνητική απόδοση	Πιθανότητα
	0,20	0,60
	0,30	0,40
Επένδυση Β	Δυνητική απόδοση	Πιθανότητα
	0,30	0,60
	0,05	0,40

Όμως η συνδιακύμανση είναι:

$$COV(R_1, R_2) = \sigma_{1,2} = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{1,2} \quad \text{και} \quad COV(R_1, R_2) = \sum P_i \cdot [R_{1i} - E(R_1)] \cdot [R_{2i} - E(R_2)]$$

$$COV(R_A, R_B) = 0,60 \cdot (0,20 - 0,24)(0,30 - 0,20) + 0,40 \cdot (0,30 - 0,24)(0,05 - 0,20) = -0,0024 - 0,0036 = -0,006$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Άσκηση 2

- Επανερχόμαστε στον υπολογισμό της διακύμανσης σ²:

$$\sigma_p^2 = w_A^2 \cdot \sigma_A^2 + w_A^2 \cdot \sigma_A^2 + 2 \cdot w_A \cdot w_B \cdot COV(R_A, R_B) = (0{,}50)^2 \cdot 0{,}0024 + (0{,}50)^2 \cdot 0{,}015 + 2 \cdot 0{,}50 \cdot 0{,}50(-0{,}006) =$$

$$\sigma_p^2 = 0{,}00675$$

Κατά συνέπεια, ο κίνδυνος (τυπική απόκλιση) είναι:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{0{,}00675} = 0{,}082$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr

Άσκηση 2

(γ) Βρείτε το συντελεστή συσχέτισης των αποδόσεων των δύο επενδυτικών στοιχείων. Τι δείχνει αυτός ο συντελεστής;

- **Λύση**:
- Ο συντελεστής συσχέτισης ρ δίνεται από:
- $\rho_{1,2} = \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_1 * \sigma_2} = \frac{-0{,}006}{0{,}049 * 0{,}1225} = -0{,}99958$
- Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει αρνητική συσχέτιση μεταξύ των αποδόσεων των δύο επενδύσεων Α και Β. Όταν θα **ανεβαίνει** η απόδοση της μιας επένδυσης κατά 1 ποσοστιαίας μονάδα θα **μειωθεί** η απόδοση της άλλης επένδυσης κατά 0,99958 ποσοστιαίες μονάδες. Επομένως οι αποδόσεις των δύο χρεογράφων συσχετίζονται αρνητικά και μάλιστα έχουν συσχέτιση πολύ κοντά στο -1 δηλαδή τέλεια αρνητική συσχέτιση.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Κώστας Σολδάτος
costas.eclass4u@gmail.com eclass4U.gr