ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ ΔΕΟ13

Eclass4U

The best Choice for you

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ
ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ:10-01-22

ΣΥΝΤΑΚΤΗΣ: ΣΠΥΡΟΣ ΒΛΑΧΟΠΟΥΛΟΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Υποερώτημα Α

i)

$$y' = \left(e^{2x} - \frac{2}{x^2} + 4x^4\right)' = (e^{2x})' - \left(\frac{2}{x^2}\right)' + (4x^4)' = (e^{2x})' - 2 \cdot (x^{-2})' + 4 \cdot (x^4)' =$$

$$= e^{2x} \cdot (2x)' - 2 \cdot (-2) \cdot x^{-2-1} + 4 \cdot 4 \cdot x^{4-1} = e^{2x} \cdot 2 + 4 \cdot x^{-3} + 16 \cdot x^3 =$$

$$= 2 \cdot e^{2x} + \frac{4}{x^3} + 16 \cdot x^3$$

ii)

$$y' = [x^3 \cdot \ln(x^2+2)]' = (x^3)' \cdot \ln(x^2+2) + x^3 \cdot [\ln(x^2+2)]' =$$

$$= 3x^2 \cdot \ln(x^2+2) + x^3 \cdot \frac{1}{x^2+2} \cdot (x^2+2)' =$$

$$= 3x^2 \ln(x^2+2) + \frac{x^3}{x^2+2} \cdot [(x^2)' + (2)'] = 3x^2 \cdot \ln(x^2+2) + \frac{x^3}{x^2+2} \cdot 2x =$$

$$= 3x^2 \cdot \ln(x^2+2) + \frac{2x^4}{x^2+2} = x^2 \cdot \left[3\ln(x^2+2) + \frac{2x^2}{x^2+2}\right]$$

ii)

$$y' = \left(\frac{x^2+3}{x+3}\right)' = \frac{(x^2+3)' \cdot (x+3) - (x^2+3) \cdot (x+3)'}{(x+3)^2} =$$

$$= \frac{[(x^2)' + (3)'] \cdot (x+3) - (x^2+3) \cdot [(x)' + (3)']}{(x+3)^2} =$$

$$= \frac{(2x+0) \cdot (x+3) - (x^2+3)(1+0)}{(x+3)^2} = \frac{2x \cdot (x+3) - (x^2+3)}{(x+3)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 + 6x - x^2 - 3}{(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x - 3}{(x+3)^2}$$

SITE: www.Eclass4U.gr
Τ. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

Υποερώτημα Β

Η παράσταση εντός του ζητούμενου αόριστου ολοκληρώματος διαμορφώνεται ως εξής

$(2x-1)\cdot(x^2+2) = 2x\cdot x^2 + 2x\cdot 2 - x^2 - 2 = 2x^3 - x^2 + 4x - 2 \quad (1)$

Συνεπώς για το αόριστο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int (2x-1)\cdot(x^2+2)\,dx = \int (2x^3 - x^2 + 4x - 2)\,dx =$$

$$= \int 2x^3\,dx - \int x^2\,dx + \int 4x\,dx - \int 2\,dx =$$

$$= 2\int x^3\,dx - \int x^2\,dx + 4\int x\,dx - 2\int \,dx =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{3+1}\cdot x^{3+1} - \frac{1}{2+1}\cdot x^{2+1} + 4\cdot\frac{1}{1+1}\cdot x^{1+1} - 2x + c =$$

$$= \frac{2}{4}\cdot x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 - 2x + c = \mathbf{\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 2x + c}$$

Παραγωγίζοντας την παράσταση που προέκυψε από το αόριστο ολοκλήρωμα, έχουμε

$$\left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 2x + c\right)' = \left(\frac{1}{2}x^4\right)' - \left(\frac{1}{3}x^3\right)' + (2x^2)' - (2x)' + (c)' =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(x^4)' - \frac{1}{3}\cdot(x^3)' + 2\cdot(x^2)' - 2\cdot(x)' + 0 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 4\cdot x^{4-1} - \frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^{3-1} + 2\cdot 2\cdot x^{2-1} - 2\cdot 1 = \mathbf{2x^3 - x^2 + 4x - 2}$$

Καταλήγουμε, λοιπόν, στην ισοδύναμη παράσταση που υπήρχε στο αρχικό αόριστο ολοκλήρωμα, όπως φαίνεται από την σχέση (1), επαληθεύοντας το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Υποερώτημα Α

Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης $f_{(x)}$

$$f'_{(x)} = (x^3 - 5x^2 + 6x)' = (x^3)' - (5x^2)' + (6x)' = (x^3)' - 5\cdot(x^2)' + 6\cdot(x)' =$$

$$= 3\cdot x^{3-1} - 5\cdot 2\cdot x^{2-1} + 6\cdot 1 = \mathbf{3x^2 - 10x + 6}$$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη παράγωγος είναι τριώνυμο με $\alpha = 3, \beta = -10, \gamma = 6$

Για να μελετήσουμε ως προς το πρόσημο χρειάζεται να βρούμε τις ρίζες του τριωνύμου.

Έτσι, έχουμε :

$$\Delta = \beta^2 - 4\cdot\alpha\cdot\gamma = (-10)^2 - 4\cdot 3\cdot 6 = 100 - 72 = 28 > 0$$

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha} = \frac{-(-10) + \sqrt{28}}{2\cdot 3} = \frac{10 + 5{,}29}{6} = \frac{15{,}29}{6} = 2{,}549$$

$$x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha} = \frac{-(-10) - \sqrt{28}}{2\cdot 3} = \frac{10 - 5{,}29}{6} = \frac{4{,}71}{6} = 0{,}785$$

Γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α στο διάστημα εντός των 2 ριζών και ομόσημο του α στα διαστήματα εκτός των 2 ριζών. Δηλαδή, η πρώτη παράγωγος είναι αρνητική στο διάστημα $(0{,}785\ ,\ 2{,}549)$ και θετική στα διαστήματα $(0\ ,\ 0{,}785)$ και

$(2{,}549\ ,\ +\infty)$. Πλέον, γνωρίζοντας το πρόσημο της πρώτης παραγώγου, μπορούμε να κατασκευάσουμε τον πίνακα μονοτονίας της $f_{(x)}$.

x	0		0,785		2,549		$+\infty$
$f'_{(x)}$		+	0	-	0	+	
$f_{(x)}$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση είναι φθίνουσα για κάθε

$x \in [0{,}785\ ,\ 2{,}549]$ και αντιστοίχως αύξουσα για κάθε $x \in (-\infty, 0{,}785] \cup [2{,}549, +\infty)$

Υποερώτημα Β

Μέγιστη κι ελάχιστη τιμή στο διάστημα $[\mathbf{0},\ \mathbf{2}]$

Στο συγκεκριμένο διάστημα η συνάρτηση είναι αύξουσα αριστερά του 2,549 και φθίνουσα δεξιά του. Συνεπώς στο 0,785 θα παρουσιάζει την μέγιστη τιμή της η οποία θα είναι ίση με

$$\mathrm{f}_{(0,785)} = 0{,}785^3 - 5 \cdot 0{,}785^2 + 6 \cdot 0{,}785 = 0{,}484 - 5 \cdot 0{,}616 + 4{,}71 = 2{,}114$$

Αντίστοιχα, στα άκρα του ζητούμενου διαστήματος οι τιμές της συνάρτησης είναι ίσες με

$$\mathrm{f}_{(0)} = 0^3 - 5 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 = 0$$

$$\mathrm{f}_{(2)} = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 = 8 - 5 \cdot 4 + 12 = 0$$

Δηλαδή η ελάχιστη τιμή παρουσιάζεται όταν $\mathrm{x} = 0$ και $\mathrm{x} = 2$

Τελικά, η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι ίση με 2,114 και η ελάχιστη ίση με 0.

Μέγιστη κι ελάχιστη τιμή στο διάστημα $[\mathbf{2},\ \mathbf{3}]$

Στο συγκεκριμένο διάστημα η συνάρτηση είναι φθίνουσα αριστερά του 2,549 και αύξουσα δεξιά του. Συνεπώς στο 2,549 θα παρουσιάζει την ελάχιστη τιμή της η οποία θα είναι ίση με

$$\mathrm{f}_{(2,549)} = 2{,}549^3 - 5 \cdot 2{,}549^2 + 6 \cdot 2{,}549 = 16{,}562 - 5 \cdot 6{,}497 + 15{,}294 = -0{,}629$$

Αντίστοιχα, στα άκρα του ζητούμενου διαστήματος οι τιμές της συνάρτησης είναι ίσες με

$$\mathrm{f}_{(2)} = 0$$

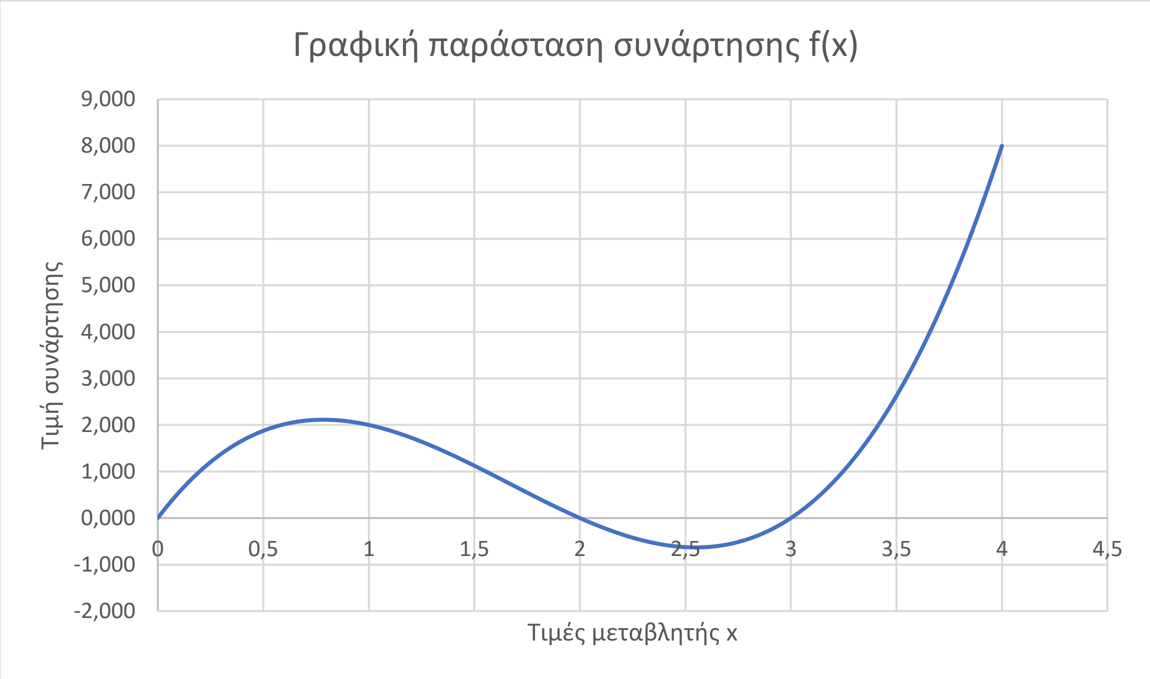
$$\mathrm{f}_{(3)} = 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 = 27 - 5 \cdot 9 + 18 = 0$$

Δηλαδή η μέγιστη τιμή παρουσιάζεται όταν $\mathrm{x} = 2$ και $\mathrm{x} = 3$

Τελικά, η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι ίση με 0 και η ελάχιστη ίση με -0,629.

Υποερώτημα Γ

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f_{(x)}$ όπως προέκυψε μέσω Excel είναι αυτή που ακολουθεί



Από την παραπάνω γραφική παράσταση επαληθεύονται τα ευρήματα των προηγούμενων υποερωτημάτων, δηλαδή η μονοτονία όπως μελετήθηκε αλλά και οι ακρότατες τιμές της συνάρτησης στα επιμέρους διαστήματα.

Υποερώτημα Δ

Στο διάστημα $[0,\ 2]$ η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές (κάτι που επαληθεύεται κι από την παραπάνω γραφική παράσταση) συνεπώς το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι

$$E = \int_0^2 f_{(x)}\,dx = \int_0^2 (x^3 - 5x^2 + 6x)\,dx = \int_0^2 x^3\,dx - \int_0^2 5x^2\,dx + \int_0^2 6x\,dx =$$

$$= \int_0^2 x^3\,dx - 5\int_0^2 x^2\,dx + 6\int_0^2 x\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{3+1}\cdot x^{3+1}\right]_0^2 - 5\cdot\left[\frac{1}{2+1}\cdot x^{2+1}\right]_0^2 + 6\cdot\left[\frac{1}{1+1}\cdot x^{1+1}\right]_0^2 =$$

$$=\left[\frac{1}{4}\cdot x^4\right]_0^2-5\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot x^3\right]_0^2+6\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot x^2\right]_0^2=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot[x^4]_0^2-5\cdot\frac{1}{3}\cdot[x^3]_0^2+6\cdot\frac{1}{2}\cdot[x^2]_0^2=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot(2^4-0^4)-\frac{5}{3}\cdot(2^3-0^3)+3\cdot(2^2-0^2)=\frac{1}{4}\cdot16-\frac{5}{3}\cdot8+3\cdot4=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot16-\frac{5}{3}\cdot8+3\cdot4=4-\frac{40}{3}+12=16-\frac{40}{3}=\frac{16\cdot3}{3}-\frac{40}{3}=\frac{48}{3}-\frac{40}{3}=\frac{8}{3}$$

Τελικά, το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου είναι ίσο με $\frac{8}{3}$ τετραγωνικές μονάδες

ΑΣΚΗΣΗ 3

Υποερώτημα Α

Αρχικά, θα υπολογίσουμε την συνάρτηση μέσων εσόδων

$$AR = \frac{TR}{Q} = \frac{-Q^3 + 40Q^2 - 25Q}{Q} = -\frac{Q^3}{Q} + \frac{40Q^2}{Q} - \frac{25Q}{Q} \Leftrightarrow \mathbf{AR = -Q^2 + 40Q - 25}$$

Για την παραπάνω συνάρτηση μέσων εσόδων θέλουμε τις τιμές της μεταβλητής Q για τις οποίες παρουσιάζει τοπικά ακρότατα. Θα εφαρμόσουμε κριτήρια 1ης και 2ης παραγώγου. Αρχικά, υπολογίζουμε την 1η παράγωγο

$$AR' = (-Q^2 + 40Q - 25)' = (-Q^2)' + (40Q)' - (25)' = -(Q^2)' + 40 \cdot (Q)' - 0 =$$

$$= -2Q + 40 \cdot 1 \Leftrightarrow \mathbf{AR' = -2Q + 40}$$

Βρίσκουμε τις ρίζες της 1ης παραγώγου

$$AR' = 0 \Leftrightarrow -2Q + 40 = 0 \Leftrightarrow -2Q = -40 \Leftrightarrow \frac{-2Q}{-2} = \frac{-40}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q = 20 \text{ (πιθανό σημείο σημείο ακροτάτου)}$$

Υπολογίζουμε την 2η παράγωγο

$$AR'' = (-2Q + 40)' = (-2Q)' + (40)' = -2 \cdot (Q)' + 0 \Leftrightarrow \mathbf{AR'' = -2}$$

Αντικαθιστούμε την μοναδική ρίζα της 1ης παραγώγου στην 2η παράγωγο, και έχουμε

$$AR''_{(20)} = -2 < 0$$

Επομένως για ποσότητα $Q = 20$ η συνάρτηση μέσων εσόδων παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

SITE: www.Eclass4U.gr
Τ. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

Υποερώτημα Β

Ο όγκος της πισίνας είναι ίσος με

$V = (\text{Εμβαδόν Τετράγωνης Βάσης}) \cdot (\text{Ύψος}) = x^2 \cdot y$

Όμως, δίνεται από την εκφώνηση ότι ο όγκος της πισίνας είναι ίσος με $32m^3$ επομένως

$$x^2 \cdot y = 32 \Leftrightarrow y = \frac{32}{x^2} \quad (1)$$

Η συνολική επιφάνεια της πισίνας που θα επενδυθεί με πλακάκια είναι ίση με το άθροισμα των εμβαδών της τετράγωνης βάσης της και των 4 ορθογώνιων παραλληλόγραμμων εδρών της, δηλαδή

$\mathbf{E = x^2 + 4 \cdot x \cdot y}$ και από την σχέση (1) με αντικατάσταση έχουμε

$$E = x^2 + 4xy = x^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{32}{x^2} \Leftrightarrow \mathbf{E = x^2 + \frac{128}{x}}$$

Εφόσον το συνολικό κόστος είναι ανάλογο του εμβαδού που θα καλυφθεί, για να βρούμε το ελάχιστο κόστος θα βρούμε την ελάχιστη τιμή του συνολικού εμβαδού.

Εφαρμόζουμε κριτήρια $1^{ης}$ και $2^{ης}$ παραγώγου

$$E' = \left(x^2 + \frac{128}{x}\right)' = (x^2)' + \left(128 \cdot \frac{1}{x}\right)' = (x^2)' + 128 \cdot (x^{-1})' =$$

$$= 2x + 128 \cdot (-1) \cdot x^{-2} = 2x - \frac{128}{x^2}$$

Βρίσκουμε τις ρίζες της $1^{ης}$ παραγώγου

$$E' = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{128}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot x^2 - \frac{128}{x^2} \cdot x^2 = 0 \cdot x^2 \Leftrightarrow 2x^3 - 128 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 = 128 \Leftrightarrow x^3 = \frac{128}{2} \Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{64} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ (πιθανό σημείο σημείο ακροτάτου)}$$

Υπολογίζουμε την $2^η$ παράγωγο

$$E'' = \left(2x - \frac{128}{x^2}\right)' = (2x)' - \left(\frac{128}{x^2}\right)' = 2 \cdot (x)' - 128 \cdot (x^{-2})' =$$

$$= 2 \cdot 1 - 128 \cdot (-2) \cdot x^{-3} = 2 + \frac{256}{x^3}$$

SITE: www.Eclass4U.gr
Τ. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

Αντικαθιστούμε την μοναδική ρίζα της 1ης παραγώγου στην 2η παράγωγο, και έχουμε

$$E''_{(4)} = 2 + \frac{256}{4^3} = 2 + \frac{256}{64} = 2 + 4 = 6 > 0$$

Επομένως για $x = 4m$ η συνάρτηση του συνολικού εμβαδού παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, το ίδιο και το συνολικό κόστος επένδυσης της πισίνας.

Κι από την σχέση (1) παίρνουμε

$$y = \frac{32}{x^2} = \frac{32}{4^2} = \frac{32}{16} \Leftrightarrow y = 2m$$

Τελικά, οι διαστάσεις της πισίνας θα πρέπει να είναι 4m X 4m (η βάση) X 2m (ύψος) ώστε να επιτύχουμε το μικρότερο κόστος.

Υποερώτημα Γ

Με αντικατάσταση στον τύπο του μέσου εισοδήματος της συνάρτησης $f_{(r)} = B \cdot r^{-3}$ καθώς και των άκρων ολοκλήρωσης $\alpha = 1$ και $\beta = 2$, η ζητούμενη παράσταση διαμορφώνεται ως εξής

$$m = \frac{\int_1^2 r \cdot B \cdot r^{-3}\,dr}{\int_1^2 B \cdot r^{-3}\,dr} = \frac{B \cdot \int_1^2 r^{-2}\,dr}{B \cdot \int_1^2 r^{-3}\,dr} = \frac{\int_1^2 r^{-2}\,dr}{\int_1^2 r^{-3}\,dr} = \frac{\left[\frac{1}{-2+1} \cdot r^{-2+1}\right]_1^2}{\left[\frac{1}{-3+1} \cdot r^{-3+1}\right]_1^2} =$$

$$= \frac{[-r^{-1}]_1^2}{\left[-\frac{1}{2} \cdot r^{-2}\right]_1^2} = \frac{-\left[\frac{1}{r}\right]_1^2}{-\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{r^2}\right]_1^2} = \frac{-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1}\right)}{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{2}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{4}\right)} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)} =$$

$$\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{8}} = \frac{8 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{4}{3}$$

Τελικά, το μέσο εισόδημα βρέθηκε ίσο με $\frac{4}{3}$ νομισματικές μονάδες.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Υποερώτημα Α

Λύνοντας τις σχέσεις ως προς την ποσότητα Q θα έχουμε ισοδύναμα :

$3P^2 + Q = 108 \Leftrightarrow \mathbf{Q = 108 - 3P^2}$ (1)

$Q - 5P = 80 \Leftrightarrow \mathbf{Q = 80 + 5P}$ (2)

Παραγωγίζοντας την σχέση (1) έχουμε

$Q' = (108 - 3P^2)' = (108)' - (3P^2)' = 0 - 3 \cdot (P^2)' = -3 \cdot 2 \cdot P = -6P \leq 0$

Αφού για την τιμή ισχύει $P \geq 0$

Εφόσον η παράγωγος είναι αρνητική, η συνάρτηση είναι φθίνουσα κι ως εκ τούτου πρόκειται για την συνάρτηση ζήτησης.

Παραγωγίζοντας την σχέση (2) έχουμε

$Q' = (80 + 5P)' = (80)' + (5P)' = 0 + 5 \cdot (P)' = 5 \cdot 1 = 5 > 0$

Εφόσον η παράγωγος είναι θετική, η συνάρτηση είναι αύξουσα κι ως εκ τούτου πρόκειται για την συνάρτηση προσφοράς.

Υποερώτημα Β

Πεδίο ορισμού συνάρτησης ζήτησης

Θα πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθοι περιορισμοί :

1) $\mathbf{P \geq 0}$

2) $\mathbf{Q \geq 0}$

3) $\mathbf{Q' \leq 0}$ (αφού η συνάρτηση ζήτησης είναι πάντα φθίνουσα)

Από τον περιορισμό 2 έχουμε :

$Q \geq 0 \Leftrightarrow 108 - 3P^2 \geq 0$

Έχουμε τριώνυμο με $\alpha = -3, \beta = 0, \gamma = 108$

Για να μελετήσουμε ως προς το πρόσημο χρειάζεται να βρούμε τις ρίζες του τριωνύμου.

SITE: www.Eclass4U.gr
Τ. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

Έτσι, έχουμε :

$$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma = 0^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 108 = 0 + 1296 = 1296 > 0$$

$$P_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} = \frac{-0 + \sqrt{1296}}{2 \cdot (-3)} = \frac{0 + 36}{-6} = -6$$

$$P_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} = \frac{-0 - \sqrt{1296}}{2 \cdot (-3)} = \frac{0 - 36}{-6} = 6$$

Γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α στο διάστημα εντός των 2 ριζών και ομόσημο του α στα διαστήματα εκτός των 2 ριζών. Συνεπώς οι λύσεις του περιορισμού 2) είναι $P \in [-6,6]$

Συναληθεύοντας με τον πρώτο περιορισμό $\mathbf{P \geq 0}$ καταλήγουμε στο εξής διάστημα

$$\mathbf{P \in [0, 6]}$$

Από τον περιορισμό 3) έχουμε :

(η παράγωγος έχει υπολογιστεί στο υποερώτημα Α)

$$Q' \leq 0 \Leftrightarrow -6P \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-6P}{-6} \geq \frac{0}{-6} \Leftrightarrow P \geq 0$$

Συναληθεύοντας με το προηγούμενο διάστημα στο οποίο είχαμε καταλήξει από τους 2 πρώτους περιορισμούς, δηλαδή το $P \in [0,6]$ καταλήγουμε στο **Πεδίο ορισμού της συνάρτησης Ζήτησης το οποίο είναι το $\mathbf{P \in [0, 6]}$**

Ομοίως

Πεδίο ορισμού συνάρτησης προσφοράς

Θα πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθοι περιορισμοί :

1) $\mathbf{P \geq 0}$

2) $\mathbf{Q \geq 0}$

3) $\mathbf{Q' \geq 0}$ (αφού η συνάρτηση προσφοράς είναι πάντα αύξουσα)

Από τον περιορισμό 2 έχουμε :

$$Q \geq 0 \Leftrightarrow 80 + 5P \geq 0 \Leftrightarrow 5P \geq -80 \Leftrightarrow \frac{5P}{5} \geq \frac{-80}{5} \Leftrightarrow P \geq -16$$

Συναληθεύοντας με τον πρώτο περιορισμό $\mathbf{P \geq 0}$ καταλήγουμε στο εξής διάστημα

$$\mathbf{P \in [0, +\infty)}$$

Από τον περιορισμό 3) έχουμε :

(η παράγωγος έχει υπολογιστεί στο υποερώτημα Α)

$Q' \geq 0 \Leftrightarrow 5 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $\mathbf{P} \in \mathbf{R}$

Συναληθεύοντας με το προηγούμενο διάστημα στο οποίο είχαμε καταλήξει από τους 2 πρώτους περιορισμούς, δηλαδή το $P \in [0, +\infty)$ καταλήγουμε στο **Πεδίο ορισμού της συνάρτησης Προσφοράς το οποίο είναι το $\mathbf{P} \in [\mathbf{0}, +\infty)$**

Τελικά, καταλήγουμε ότι το κοινό πεδίο ορισμού των 2 συναρτήσεων προσφοράς και ζήτησης είναι το $\mathbf{P} \in [\mathbf{0}, \mathbf{6}]$

Υποερώτημα Γ

Στο σημείο ισορροπίας θα ισχύει

$Q_s = Q_D \Leftrightarrow 80 + 5P = 108 - 3P^2 \Leftrightarrow 80 + 5P + 3P^2 - 108 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3P^2 + 5P - 28 = 0$

Έχουμε τριώνυμο με $\alpha = 3, \beta = 5, \gamma = -28$

$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-28) = 25 + 336 = 361 > 0$

$$P_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} = \frac{-5 + \sqrt{361}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 + 19}{6} = \frac{14}{6} = 2{,}33$$

(απόδεκτή ρίζα αφού ανήκει στο κοινό πεδί ορισμού των συναρτήσεων προσφοράς και ζήτησης)

$$P_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} = \frac{-5 - \sqrt{361}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 - 19}{6} = \frac{-24}{6} = -4 < 0 \text{ απορρίπτεται}$$

Για $P = 2{,}33$ αντικαθιστούμε στην συνάρτηση προσφοράς και έχουμε

$Q = 80 + 5 \cdot 2{,}33 = 80 + 11{,}65 = 91{,}65$

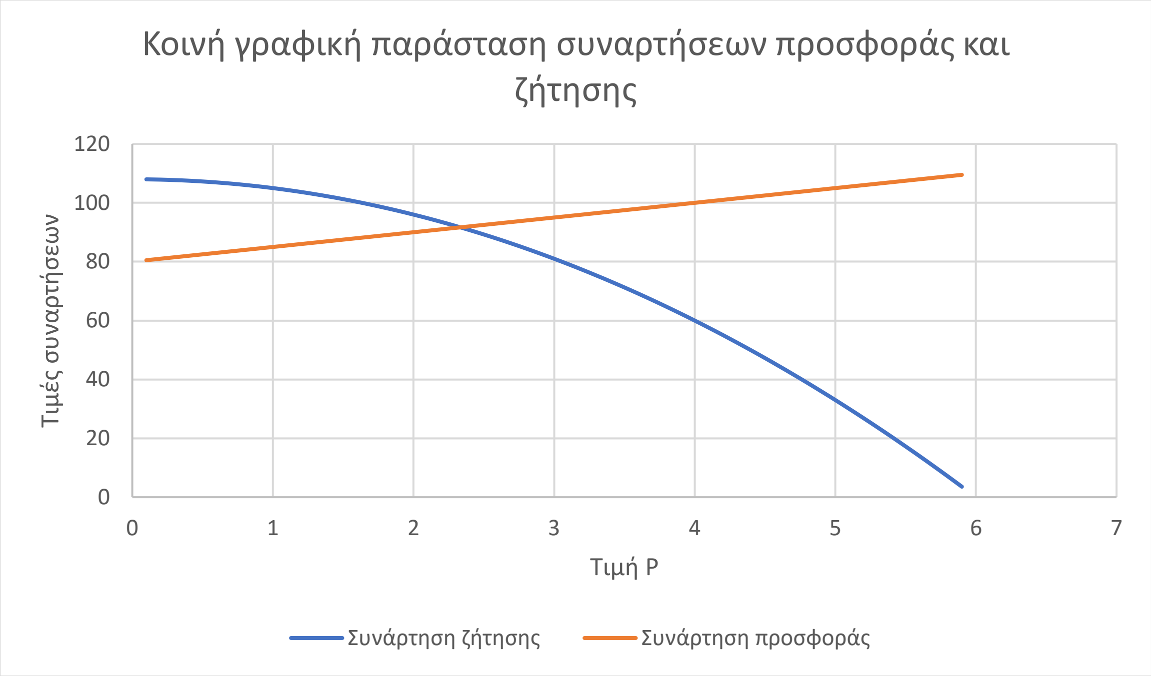
Καταλήξαμε, λοιπόν, στο ακόλουθο σημείο ισορροπίας :

$(P_I, Q_I) = (2{,}33 \ , 91{,}65)$

SITE: www.Eclass4U.gr
Τ. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

Υποερώτημα Δ

Η κοινή γραφική παράσταση των συναρτήσεων προσφοράς και ζήτησης, όπως προέκυψε από το Excel, είναι αυτή που ακολουθεί



Υποερώτημα Ε

Αρχικά θα υπολογίσουμε την συνάρτηση της ελαστικότητας ζήτησης, ως εξής

$$\varepsilon_d = \frac{P}{Q} \cdot Q' = \frac{P}{108 - 3P^2} \cdot (108 - 3P^2)' = \frac{P}{108 - 3P^2} \cdot (-6P) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon_d = -\frac{6P^2}{108 - 3P^2}}$$

Η παραπάνω συνάρτηση για $P = 2{,}33$ που έχουμε στο σημείο ισορροπίας, γίνεται

$$\varepsilon_d = -\frac{6 \cdot 2{,}33^2}{108 - 3 \cdot 2{,}33^2} = -\frac{32{,}58}{108 - 16{,}29} = -\frac{32{,}58}{91{,}71} = -0{,}353$$

Ερμηνεία ελαστικότητας : Αν η τιμή αυξηθεί (μειωθεί) κατά 1% τότε η ζητούμενη ποσότητα θα μειωθεί (αυξηθεί) κατά 0,353%