ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ

ΔΕΟ13

Eclass4U

The best Choice for you

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

4ΗΣ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

2021-2022

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ:08-04-22

ΣΥΝΤΑΚΤΗΣ:ΣΠΥΡΟΣ ΒΛΑΧΟΠΟΥΛΟΣ

Περιεχόμενα

SITE: www.Eclass4U.gr
Τ. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ερώτημα Α

Υποερώτημα i

Θα πρέπει να υπολογιστεί πόσες σοκολάτες τύπου Α και αντίστοιχα πόσες σοκολάτες τύπου Β θα πρέπει να παραχθούν από την σοκολατοποιΐα ώστε να επιτευχθεί το μέγιστο κέρδος.

Μεταβλητές απόφασης

X : Πλήθος σοκολατών τύπου Α που θα παράγονται ημερησίως

Y : Πλήθος σοκολατών τύπου Β που θα παράγονται ημερησίως

Αντικειμενική συνάρτηση (στόχος)

Η συνάρτηση που περιγράφει το κέρδος της σοκολατοποιΐας

$(\max)\ \mathrm{Z} = 0{,}8 \cdot \mathrm{X} + 1 \cdot \mathrm{Y}$

Περιορισμοί

Από την συνολική διαθέσιμη ποσότητα γάλακτος έχουμε

$\mathbf{X} + \mathbf{Y} \leq \mathbf{5000}$

Από την συνολική διαθέσιμη ποσότητα κακάο έχουμε

$\mathbf{2} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{3} \cdot \mathbf{Y} \leq \mathbf{12000}$

Από την συμφωνία να παραδίδονται τουλάχιστον 1000 σοκολάτες τύπου Β κάθε μέρα έχουμε

$\mathbf{Y} \geq \mathbf{1000}$

Περιορισμοί μη αρνητικότητας

$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$

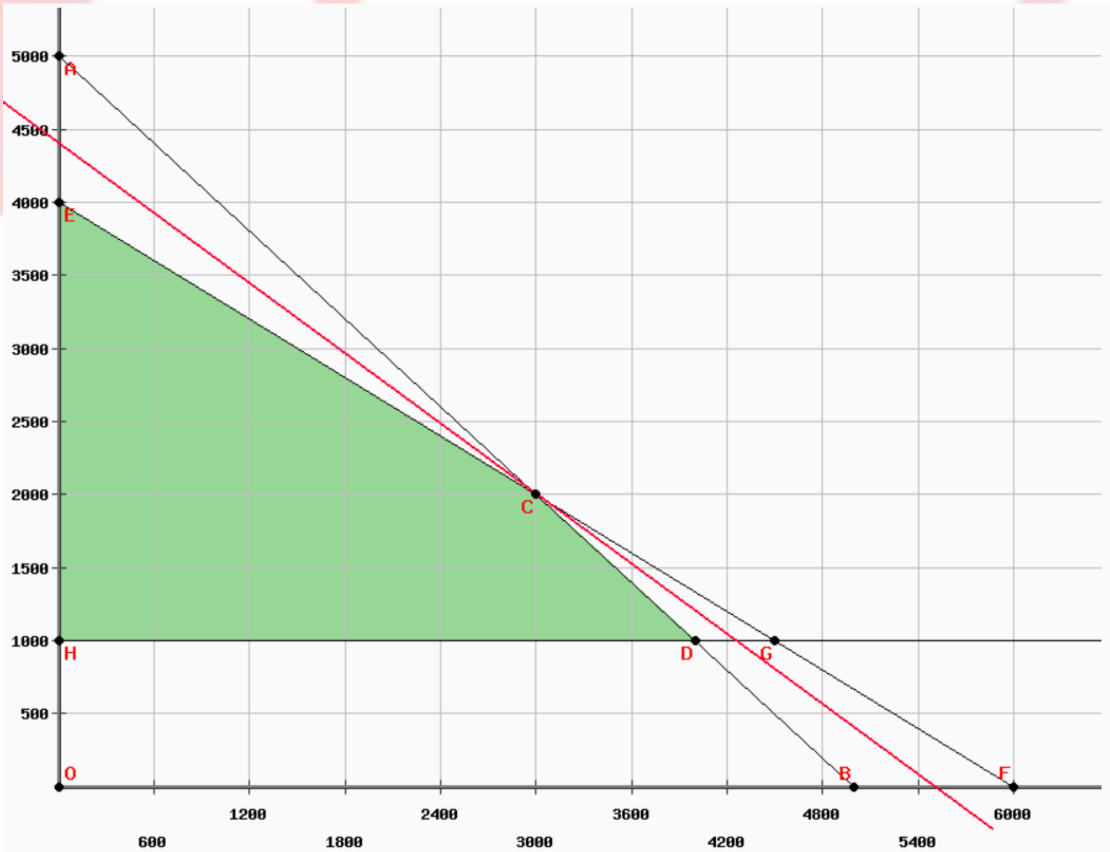
$\mathbf{Y} \geq \mathbf{0}$

Καταλήγουμε, λοιπόν, στο ακόλουθο μαθηματικό μοντέλο για το πρόβλημα μεγιστοποίησης του ημερήσιου κέρδους της σοκολατοποιΐας

Μαθηματικό Μοντέλο
$(\mathbf{max})\ \mathbf{Z} = \mathbf{0,8 \cdot X + 1 \cdot Y}$ (Αντικειμενική συνάρτηση)
$\mathbf{X + Y \leq 5000}$ (από διαθέσιμη ποσότητα γάλακτος)
$\mathbf{2 \cdot X + 3 \cdot Y \leq 12000}$ (από διαθέσιμη ποσότητα κακάο)
$\mathbf{Y \geq 1000}$ (από στόχο παραγωγής σοκολάτας τύπου Β)
$\mathbf{X \geq 0}$ (Περιορισμός μη αρνητικότητας)
$\mathbf{Y \geq 0}$ (Περιορισμός μη αρνητικότητας)

Υποερώτημα ii

Για τη γραφική επίλυση χρησιμοποιήθηκε το link που υποδείχθηκε από την εκφώνηση και το σχήμα είναι αυτό που ακολουθεί.



<u>Χάραξη της περιοριστικής ευθείας $\mathbf{X + Y = 5000}$</u>

Για $X = 0$ έχουμε

$0 + Y = 5000 \Leftrightarrow Y = 5000$

Η ευθεία διέρχεται από το σημείο **A (0 , 5000)**

Για $Y = 0$ έχουμε

$X + 0 = 5000 \Leftrightarrow X = 5000$

Η ευθεία διέρχεται από το σημείο **B (5000 , 0)**

<u>Χάραξη της περιοριστικής ευθείας $\mathbf{2 \cdot X + 3 \cdot Y = 12000}$</u>

Για $X = 0$ έχουμε

$2 \cdot 0 + 3 \cdot Y = 12000 \Leftrightarrow 3 \cdot Y = 12000 \Leftrightarrow Y = \frac{12000}{3} \Leftrightarrow Y = 4000$

Η ευθεία διέρχεται από το σημείο **E (0 , 4000)**

Για $Y = 0$ έχουμε

$2 \cdot X + 3 \cdot 0 = 12000 \Leftrightarrow 2 \cdot X = 12000 \Leftrightarrow X = \frac{12000}{2} \Leftrightarrow X = 6000$

Η ευθεία διέρχεται από το σημείο **F (6000 , 0)**

<u>Χάραξη της περιοριστικής ευθείας $\mathbf{Y = 1000}$</u>

Η (παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα) ευθεία διέρχεται από το σημείο **H (0 , 1000)**

<u>Εύρεση συντεταγμένων σημείου C</u>

Είναι το σημείο τομής των ευθειών $\mathbf{X + Y = 5000}$ και $\mathbf{2 \cdot X + 3 \cdot Y = 12000}$ συνεπώς θα λύσουμε το σύστημά τους

$X + Y = 5000 \Leftrightarrow X = 5000 - Y \ (1)$

$2 \cdot X + 3 \cdot Y = 12000 \ \ (2)$

SITE: www.Eclass4U.gr | **Τ. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981**
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

Η σχέση (2) με αντικατάσταση της (1) γίνεται

$2 \cdot (5000 - \mathrm{Y}) + 3 \cdot \mathrm{Y} = 12000 \Leftrightarrow 10000 - 2 \cdot \mathrm{Y} + 3 \cdot \mathrm{Y} = 12000 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{Y} = 12000 - 10000 \Leftrightarrow \mathbf{Y = 2000}$

Αντικαθιστώντας στην (1) την τιμή του Y έχουμε

$\mathrm{X} = 5000 - 2000 \Leftrightarrow \mathbf{X = 3000}$

Επομένως το σημείο C έχει συντεταγμένες **C (3000 , 2000)**

Εύρεση συντεταγμένων σημείου D

Είναι το σημείο τομής των ευθειών $\mathbf{Y = 5000}$ και $\mathbf{2 \cdot X + 3 \cdot Y = 12000}$ συνεπώς θα λύσουμε το σύστημά τους

$\mathrm{X} + \mathrm{Y} = 5000 \ (1)$

$\mathrm{Y} = 1000 \ (2)$

Η σχέση (1) με αντικατάσταση της (2) γίνεται

$\mathrm{X} + 1000 = 5000 \Leftrightarrow \mathrm{X} = 5000 - 1000 \Leftrightarrow \mathrm{X} = 4000$

Επομένως το σημείο D έχει συντεταγμένες **D (4000 , 1000)**

Οι συντεταγμένες όλων των κορυφών της εφικτής περιοχής είναι πλέον γνωστές κι έτσι κατασκευάζεται ο παρακάτω πίνακας

Κορυφή	X	Y	Τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $\mathbf{Z = 0,8 \cdot X + 1 \cdot Y}$
H	0	1000	$\mathrm{Z} = 0{,}8 \cdot 0 + 1 \cdot 1000 = 1000$
E	0	4000	$\mathrm{Z} = 0{,}8 \cdot 0 + 1 \cdot 4000 = 4000$
C	3000	2000	$\mathrm{Z} = 0{,}8 \cdot 3000 + 1 \cdot 2000 = 4400$ **(Μέγιστη τιμή)**
D	4000	1000	$\mathrm{Z} = 0{,}8 \cdot 4000 + 1 \cdot 1000 = 4200$

Συμπεραίνουμε ότι στο πρόβλημα μεγιστοποίησης του ημερήσιου κέρδους της σοκολατοποιΐας **η άριστη τιμή είναι 4400 ευρώ** η οποία επιτυγχάνεται από την παραγωγή **3000 σοκολατών Α και αντίστοιχα 2000 σοκολατών τύπου Β (άριστη λύση).**

Υποερώτημα iii

Το φύλλο εργασίας του Excel που περιέχει τα δεδομένα και την επίλυση είναι αυτό που ακολουθεί

	Σοκολάτα τύπου Α	**Σοκολάτα τύπου Β**	Σύνολο		
Ημερήσια παραγωγή (τεμάχια)	3000	2000			
Κέρδος ανά τεμάχιο (σε €)	0,8	1			
Διαθέσιμη ποσότητα γάλακτος	1	1	5000	≤	5000
Διαθέσιμη ποσότητα κακάο	2	3	12000	≤	12000
Ημερήσια ελάχιστη ποσότητα σοκολάτας τύπου Β	0	1	2000	≥	1000
Περιορισμός μη αρνητικότητας (Χ)	1	0	3000	≥	0
Περιορισμός μη αρνητικότητας (Υ)	0	1	2000	≥	0
Ημερήσιο κέρδος σοκολατοποιΐας (σε €)	4400				

Η αναφορά απάντησης όπως προέκυψε από το Excel

Microsoft Excel 16.0 Αναφορά απαντήσεων
Φύλλο εργασίας: [ΔΕΟ13 4ΗΓΕ.xlsx]Φύλλο1
Δημιουργήθηκε έκθεση: 6/4/2022 2:43:31 μμ
Αποτέλεσμα: Η Επίλυση εντόπισε μια λύση. Όλοι οι περιορισμοί και οι βέλτιστες συνθήκες ικανοποιούνται.
Μηχανισμός Επίλυσης
Μηχανισμός: Simplex LP
Χρόνος λύσης: 0,031 Δευτερόλεπτα.
Διαδοχικές προσεγγίσεις: 5 Δευτερεύοντα προβλήματα: 0
Επιλογές Επίλυσης
Μέγιστος χρόνος Απεριόριστος, Διαδοχικές προσεγγίσεις Απεριόριστος, Precision 0,000001
Μέγιστος αριθμός δευτερευόντων προβλημάτων Απεριόριστος, Μέγιστος αριθμός ακέραιων λύσεων Απεριόριστος, Ακέραιο περιθώριο 1%, Να θεωρείται μη αρνητικός

Κελί στόχου (Μέγιστη)

Κελί	Όνομα	Αρχική τιμή	Τελική τιμή
$E$17	Ημερήσιο κέρδος σοκολατοποιΐας (σε €) Σοκολάτα τύπου Α	4400	4400

Μεταβλητά κελιά

Κελί	Όνομα	Αρχική τιμή	Τελική τιμή	Ακέραιος
$E$7	Ημερήσια παραγωγή (τεμάχια) Σοκολάτα τύπου Α	3000	3000	Contin
$F$7	Ημερήσια παραγωγή (τεμάχια) Σοκολάτα τύπου Β	2000	2000	Contin

Περιορισμοί

Κελί	Όνομα	Τιμή κελιού	Τύπος	Κατάσταση	Αδράνεια
$G$10	Διαθέσιμη ποσότητα γάλακτος Σύνολο	5000	$G$10<=I1C	Με δέσμευση	0
$G$11	Διαθέσιμη ποσότητα κακάο Σύνολο	12000	$G$11<=$I$11	Με δέσμευση	0
$G$12	Ημερήσια ελάχιστη ποσότητα σοκολάτας τύπου Β Σύνολο	2000	$G$12>=$I$12	Χωρίς δέσμευση	1000
$G$13	Περιορισμός μη αρνητικότητας (Χ) Σύνολο	3000	$G$13>=$I$13	Χωρίς δέσμευση	3000
$G$14	Περιορισμός μη αρνητικότητας (Υ) Σύνολο	2000	$G$14>=$I$14	Χωρίς δέσμευση	2000

Η αναφορά διαβάθμισης όπως προέκυψε από το Excel

Microsoft Excel 16.0 Αναφορά διαβάθμισης
Φύλλο εργασίας: [ΔΕΟ13 4ΗΓΕ.xlsx]Φύλλο1
Δημιουργήθηκε έκθεση: 6/4/2022 2:43:31 μμ

Μεταβλητά κελιά

Κελί	Όνομα	Τελικό Τιμή	Μειωμένο Κόστος	Στόχος Συντελεστής	Επιτρεπτό Αύξηση	Επιτρεπτό Μείωση
$E$7	Ημερήσια παραγωγή (τεμάχια) Σοκολάτα τύπου Α	3000	0	0,8	0,2	0,133333333
$F$7	Ημερήσια παραγωγή (τεμάχια) Σοκολάτα τύπου Β	2000	0	1	0,2	0,2

Περιορισμοί

Κελί	Όνομα	Τελικό Τιμή	Σκιά Τιμή	Περιορισμός Δεξιά πλευρά	Επιτρεπτό Αύξηση	Επιτρεπτό Μείωση
$G$10	Διαθέσιμη ποσότητα γάλακτος Σύνολο	5000	0,4	5000	500	1000
$G$11	Διαθέσιμη ποσότητα κακάο Σύνολο	12000	0,2	12000	3000	1000
$G$12	Ημερήσια ελάχιστη ποσότητα σοκολάτας τύπου Β Σύνολο	2000	0	1000	1000	1E+30
$G$13	Περιορισμός μη αρνητικότητας (Χ) Σύνολο	3000	0	0	3000	1E+30
$G$14	Περιορισμός μη αρνητικότητας (Υ) Σύνολο	2000	0	0	2000	1E+30

Ερώτημα Β

Υποερώτημα i

Από το αποτέλεσμα επίλυσης του Excel που δόθηκε, προκύπτει ότι η **άριστη λύση είναι το πρώτο εργοστάσιο να δουλέψει 35 ώρες, το δεύτερο εργοστάσιο να δουλέψει 30 ώρες ενώ το τρίτο εργοστάσιο να δουλέψει 40 ώρες**. Έτσι, προκύπτει **η άριστη τιμή για το ελάχιστο συνολικό κόστος παραγωγής, το οποίο είναι 50.000€.**

Υποερώτημα ii

Δεδομένου ότι η «σκιώδης τιμή» (από την αναφορά ευαισθησίας) αποτυπώνει την μεταβολή στην αντικειμενική συνάρτηση από την αύξηση κατά 1 μονάδα σε κάποιο περιορισμό, μπορούμε να συμπεράνουμε τα εξής

Για το πρώτο εργοστάσιο : Η σκιώδης τιμή είναι ίση με 0 συνεπώς ενδεχόμενη αύξηση των διαθέσιμων ωρών λειτουργίας κατά 1 ώρα δε θα έχει αντίκτυπο στο συνολικό κόστος. Επιπλέον, από την αναφορά απάντησης διαπιστώνουμε ότι παραμένουν αδρανείς 25 ώρες λειτουργίας, συνεπώς αύξηση κατά 20 των διαθέσιμων ωρών λειτουργίας του δε θα είχαν πρακτικό αποτέλεσμα, αφού δε θα χρησιμοποιούνταν.

Για το δεύτερο εργοστάσιο : Η σκιώδης τιμή είναι ίση με -300 συνεπώς ενδεχόμενη αύξηση των διαθέσιμων ωρών λειτουργίας κατά 1 ώρα θα επιφέρει μείωση του συνολικού κόστους κατά 300 χ.μ.

Επομένως αύξηση κατά 20 ώρες θα επιφέρει μείωση του συνολικού κόστους κατά

$20 \cdot 300 = 6000$ χ. μ.

Για το τρίτο εργοστάσιο : Η σκιώδης τιμή είναι ίση με -400 συνεπώς ενδεχόμενη αύξηση των διαθέσιμων ωρών λειτουργίας κατά 1 ώρα θα επιφέρει μείωση του συνολικού κόστους κατά 400 χ.μ.

Επομένως αύξηση κατά 20 ώρες θα επιφέρει μείωση του συνολικού κόστους κατά

$20 \cdot 400 = 8000$ χ. μ.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι τελικά συμφέρει η αύξηση των διαθέσιμων ωρών λειτουργίας του τρίτου εργοστασίου.

Υποερώτημα iii

Από την αναφορά απάντησης διαπιστώνουμε ότι παραμένουν σε αδράνεια 5 ώρες από τις συνολικές διαθέσιμες ώρες λειτουργίας και των τριών εργοστασίων. Επομένως ενδεχόμενη μείωση 4 ωρών (από 110σε 106) δε θα έχει καμία απολύτως επίπτωση στο συνολικό κόστος.

Υποερώτημα iv

Από την αναφορά ευαισθησίας διαπιστώνουμε ότι η «σκιώδης τιμή» για την ελάχιστη παραγωγή ποδηλάτων είναι ίση με 300. Αυτό σημαίνει ότι ενδεχόμενη αύξηση της ελάχιστης ποσότητας ποδηλάτων κατά 1 ποδήλατο θα επιφέρει αύξηση στο συνολικό κόστος παραγωγής κατά 300 χρηματικές μονάδες. Αναλογικά, αύξηση κατά 5 ποδήλατα θα έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του συνολικού κόστους κατά

$5 \cdot 300 = 1500$ χ. μ.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Έχουμε πρόβλημα συντομότερης διαδρομής από τον Κόμβο 1 (αφετηρία) προς τον Κόμβο 8 (προορισμός). Πρώτος μόνιμος κόμβος είναι ο Κόμβος 1 και το σύνολο μόνιμων κόμβων είναι {1}. Ο αλγόριθμος θα τερματιστεί όταν ο κόμβος – προορισμός ενταχθεί στο σύνολο μόνιμων κόμβων.

1η επανάληψη

Ο Κόμβος 2 είναι προσβάσιμος κατευθείαν από την αφετηρία μέσω της διαδρομής 1→2 με απόσταση 12 χιλιομέτρων.

Ο Κόμβος 3 είναι προσβάσιμος κατευθείαν από την αφετηρία μέσω της διαδρομής 1→3 με απόσταση 18 χιλιομέτρων.

Ο Κόμβος 4 είναι προσβάσιμος κατευθείαν από την αφετηρία μέσω της διαδρομής 1→4 με απόσταση 17 χιλιομέτρων.

Η ελάχιστη διαδρομή (12 χιλιόμετρα) αντιστοιχεί στον Κόμβο 2, ο οποίος γίνεται μόνιμος. Το νέο σύνολο μόνιμων κόμβων είναι το {1,2}.

2η επανάληψη

Ο Κόμβος 3 είναι προσβάσιμος κατευθείαν από την αφετηρία μέσω της διαδρομής 1→3 με απόσταση 18 χιλιομέτρων.

Ο Κόμβος 4 είναι προσβάσιμος κατευθείαν από την αφετηρία μέσω της διαδρομής 1→4 με απόσταση 17 χιλιομέτρων.

Επιπλέον είναι προσβάσιμος μέσω του μόνιμου κόμβου 2 με το μονοπάτι 1→2→4 με συνολική απόσταση 32 χιλιομέτρων.

Ο Κόμβος 5 είναι προσβάσιμος μέσω του μόνιμου κόμβου 2 με το μονοπάτι 1→2→5 με συνολική απόσταση 26 χιλιομέτρων.

Η ελάχιστη διαδρομή (17 χιλιόμετρα) αντιστοιχεί στον Κόμβο 4, ο οποίος γίνεται μόνιμος. Το νέο σύνολο μόνιμων κόμβων είναι το {1,2,4}.

3η επανάληψη

<u>Ο Κόμβος 3</u> είναι προσβάσιμος κατευθείαν από την αφετηρία μέσω της διαδρομής 1→3 με απόσταση 18 χιλιομέτρων.

Επιπλέον είναι προσβάσιμος μέσω του μόνιμου κόμβου 4 με το μονοπάτι 1→4→3 με συνολική απόσταση 41 χιλιομέτρων.

<u>Ο Κόμβος 5</u> είναι προσβάσιμος μέσω του μόνιμου κόμβου 2 με το μονοπάτι 1→2→5 με συνολική απόσταση 26 χιλιομέτρων.

Επιπλέον είναι προσβάσιμος μέσω του μόνιμου κόμβου 4 με το μονοπάτι 1→4→5 με συνολική απόσταση 27 χιλιομέτρων.

<u>Ο Κόμβος 6</u> είναι προσβάσιμος μέσω του μόνιμου κόμβου 4 με το μονοπάτι 1→4→6 με συνολική απόσταση 26 χιλιομέτρων.

<u>Ο Κόμβος 7</u> είναι προσβάσιμος μέσω του μόνιμου κόμβου 4 με το μονοπάτι 1→4→7 με συνολική απόσταση 32 χιλιομέτρων.

<u>Ο Κόμβος 8</u> είναι προσβάσιμος μέσω του μόνιμου κόμβου 4 με το μονοπάτι 1→4→8 με συνολική απόσταση 45 χιλιομέτρων.

Η ελάχιστη διαδρομή (18 χιλιόμετρα) αντιστοιχεί στον Κόμβο 3, ο οποίος γίνεται μόνιμος. Το νέο σύνολο μόνιμων κόμβων είναι το {1,2,4,3}.

4η επανάληψη

<u>Ο Κόμβος 5</u> είναι προσβάσιμος μέσω του μόνιμου κόμβου 2 με το μονοπάτι 1→2→5 με συνολική απόσταση 26 χιλιομέτρων.

Επιπλέον είναι προσβάσιμος μέσω του μόνιμου κόμβου 4 με το μονοπάτι 1→4→5 με συνολική απόσταση 27 χιλιομέτρων.

Ο Κόμβος 6 είναι προσβάσιμος μέσω του μόνιμου κόμβου 4 με το μονοπάτι 1→4→6 με συνολική απόσταση 26 χιλιομέτρων.

Επιπλέον είναι προσβάσιμος μέσω του μόνιμου κόμβου 3 με το μονοπάτι 1→3→6 με συνολική απόσταση 30 χιλιομέτρων.

Ο Κόμβος 7 είναι προσβάσιμος μέσω του μόνιμου κόμβου 4 με το μονοπάτι 1→4→7 με συνολική απόσταση 32 χιλιομέτρων.

Ο Κόμβος 8 είναι προσβάσιμος μέσω του μόνιμου κόμβου 4 με το μονοπάτι 1→4→8 με συνολική απόσταση 45 χιλιομέτρων.

Η ελάχιστη διαδρομή (26 χιλιόμετρα) αντιστοιχεί στους Κόμβους 5 και 6. Επιλέγουμε αυθαίρετα τον Κόμβο 6, ο οποίος γίνεται μόνιμος. Το νέο σύνολο μόνιμων κόμβων είναι το {1,2,4,3,6}.

5η επανάληψη

Ο Κόμβος 5 είναι προσβάσιμος μέσω του μόνιμου κόμβου 2 με το μονοπάτι 1→2→5 με συνολική απόσταση 26 χιλιομέτρων.

Επιπλέον είναι προσβάσιμος μέσω του μόνιμου κόμβου 4 με το μονοπάτι 1→4→5 με συνολική απόσταση 27 χιλιομέτρων.

Ο Κόμβος 7 είναι προσβάσιμος μέσω του μόνιμου κόμβου 4 με το μονοπάτι 1→4→7 με συνολική απόσταση 32 χιλιομέτρων.

Ο Κόμβος 8 είναι προσβάσιμος μέσω του μόνιμου κόμβου 4 με το μονοπάτι 1→4→8 με συνολική απόσταση 45 χιλιομέτρων.

Επιπλέον είναι προσβάσιμος μέσω του μόνιμου κόμβου 6 με το μονοπάτι 1→4→6→8 με συνολική απόσταση 44 χιλιομέτρων.

Η ελάχιστη διαδρομή (26 χιλιόμετρα) αντιστοιχεί στον Κόμβο 5, ο οποίος γίνεται μόνιμος. Το νέο σύνολο μόνιμων κόμβων είναι το {1,2,4,3,6,5}.

6^{η} επανάληψη

<u>Ο Κόμβος 7</u> είναι προσβάσιμος μέσω του μόνιμου κόμβου 4 με το μονοπάτι 1→4→7 με συνολική απόσταση 32 χιλιομέτρων.

Επιπλέον είναι προσβάσιμος μέσω του μόνιμου κόμβου 5 με το μονοπάτι 1→2→5→7 με συνολική απόσταση 34 χιλιομέτρων.

<u>Ο Κόμβος 8</u> είναι προσβάσιμος μέσω του μόνιμου κόμβου 4 με το μονοπάτι 1→4→8 με συνολική απόσταση 45 χιλιομέτρων.

Επιπλέον είναι προσβάσιμος μέσω του μόνιμου κόμβου 6 με το μονοπάτι 1→4→6→8 με συνολική απόσταση 44 χιλιομέτρων.

Η ελάχιστη διαδρομή (32 χιλιόμετρα) αντιστοιχεί στον Κόμβο 7, ο οποίος γίνεται μόνιμος. Το νέο σύνολο μόνιμων κόμβων είναι το {1,2,4,3,6,5,7}.

7^{η} επανάληψη

<u>Ο Κόμβος 8</u> είναι προσβάσιμος μέσω του μόνιμου κόμβου 4 με το μονοπάτι 1→4→8 με συνολική απόσταση 45 χιλιομέτρων.

Επιπλέον είναι προσβάσιμος μέσω του μόνιμου κόμβου 6 με το μονοπάτι 1→4→6→8 με συνολική απόσταση 44 χιλιομέτρων.

Είναι, επίσης, προσβάσιμος μέσω του μόνιμου κόμβου 7 με το μονοπάτι 1→4→7→8 με συνολική απόσταση 42 χιλιομέτρων.

Η ελάχιστη διαδρομή (42 χιλιόμετρα) για τον Κόμβο 8 (προορισμός) βρέθηκε, κι έτσι έγινε κι αυτός μόνιμος. Το νέο σύνολο μόνιμων κόμβων είναι το {1,2,4,3,6,5,7,8}.

Από τη στιγμή που ο Κόμβος 8 (προορισμός) μονιμοποιήθηκε, ο αλγόριθμος τερματίζεται. **Η συντομότερη διαδρομή είναι το μονοπάτι 1→4→7→8 με συνολική (ελάχιστη) απόσταση 42 χιλιομέτρων.**

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ερώτημα Α

Εφαρμόζουμε το κριτήριο minmax/maxmin στον πίνακα πληρωμών που δόθηκε από την εκφώνηση ώστε να διαπιστώσουμε αν υπάρχει σημείο ισορροπίας στο παίγνιο.

		Τηλεοπτικό Δίκτυο Β				Ελάχιστα γραμμών	Maxmin
		ΕΕ	ΕΤ	ΞΤ	ΑΓ		
Τηλεοπτικό Δίκτυο Α	ΕΕ	46	35	40	45	35	
	ΕΤ	78	40	60	55	40	40
	ΞΤ	35	45	70	25	25	
	ΑΓ	55	23	35	50	23	
Μέγιστα Στηλών		78	45	70	55		
Minmax			45				

Επειδή minmax (45) ≠ maxmin (40) στο παραπάνω παίγνιο δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας κι ως εκ τούτου δεν υπάρχει λύση με αμιγείς στρατηγικές. Θα πρέπει να αναζητηθεί λύση με μικτές στρατηγικές.

Ερώτημα Β

Σύγκριση στρατηγικών για το Τηλεοπτικό δίκτυο Α

ΕΕ με ΕΤ

$46 < 78 \ , 35 < 40 \ , 40 < 60 \ , 45 < 55$

Η στρατηγική ΕΕ είναι υποδεέστερη της ΕΤ καθώς έχει τα αντίστοιχα στοιχεία της μικρότερα (ή και ίσα). Συνεπώς η στρατηγική ΕΕ διαγράφεται από τον πίνακα πληρωμών.

ΕΤ με ΞΤ

$78 > 35 \ , 40 < 35 \ , 60 < 70 \ , 55 > 25$

Δεν προκύπτει υποδεέστερη στρατηγική

ΕΤ με ΑΓ

$78 > 55 \ , 40 > 23 \ , 60 > 35 \ , 55 > 50$

Η στρατηγική ΑΓ είναι υποδεέστερη της ΕΤ καθώς έχει τα αντίστοιχα στοιχεία της μικρότερα (ή και ίσα). Συνεπώς η στρατηγική ΑΓ διαγράφεται από τον πίνακα πληρωμών.

Από τη διαγραφή των στρατηγικών ΕΕ και ΑΓ (για το τηλεοπτικό δίκτυο Α) ο πίνακας πληρωμών του παιγνίου διαμορφώνεται ως εξής

		Τηλεοπτικό Δίκτυο Β			
		ΕΕ	ΕΤ	ΞΤ	ΑΓ
Τηλεοπτικό Δίκτυο Α	ΕΤ	78	40	60	55
	ΞΤ	35	45	70	25

Σύγκριση στρατηγικών για το Τηλεοπτικό δίκτυο Β

ΕΕ με ΕΤ

$78 > 40 \ , 35 < 45$

Δεν προκύπτει υποδεέστερη στρατηγική

ΕΕ με ΞΤ

$78 > 60 \ , 35 < 70$

Δεν προκύπτει υποδεέστερη στρατηγική

ΕΕ με ΑΓ

$78 > 55 \ , 35 > 25$

Η στρατηγική ΕΕ είναι υποδεέστερη της ΑΓ καθώς έχει τα αντίστοιχα στοιχεία της μεγαλύτερα (ή και ίσα). Συνεπώς η στρατηγική ΕΕ διαγράφεται από τον πίνακα πληρωμών.

ΕΤ με ΞΤ

$40 < 60 \ , 45 < 70$

Η στρατηγική ΞΤ είναι υποδεέστερη της ΕΤ καθώς έχει τα αντίστοιχα στοιχεία της μεγαλύτερα (ή και ίσα). Συνεπώς η στρατηγική ΞΤ διαγράφεται από τον πίνακα πληρωμών.

ΕΤ με ΑΓ

$40 < 55 \ \ , 45 > 25$

Δεν προκύπτει υποδεέστερη στρατηγική

Από τη διαγραφή των στρατηγικών ΕΕ και ΞΤ (για το τηλεοπτικό δίκτυο Β) ο πίνακας πληρωμών του παιγνίου καταλήγουμε στον ακόλουθο 2Χ2 πίνακα

		Τηλεοπτικό Δίκτυο Β	
		ΕΤ	ΑΓ
Τηλεοπτικό Δίκτυο Α	ΕΤ	40	55
	ΞΤ	45	25

Ερώτημα Γ

Ορίζουμε τις ακόλουθες πιθανότητες :

Χ : Η πιθανότητα το τηλεοπτικό δίκτυο Α να ακολουθήσει την στρατηγική ΕΤ

1-Χ : Η πιθανότητα το τηλεοπτικό δίκτυο Α να ακολουθήσει την στρατηγική ΞΤ

Υ : Η πιθανότητα το τηλεοπτικό δίκτυο Β να ακολουθήσει την στρατηγική ΕΤ

1-Υ : Η πιθανότητα το τηλεοπτικό δίκτυο Β να ακολουθήσει την στρατηγική ΑΓ

		Τηλεοπτικό Δίκτυο Β	
		ΕΤ **Υ**	ΑΓ **1-Υ**
Τηλεοπτικό Δίκτυο Α	ΕΤ **Χ**	40	55
	ΞΤ **1-Χ**	45	25

Η αξία του παιγνίου για το τηλεοπτικό δίκτυο Α, αν το τηλεοπτικό δίκτυο Β επιλέξει την στρατηγική του ΕΤ είναι ίση με

$\mathrm{V(A, ET)} = 40 \cdot \mathrm{X} + 45(1-\mathrm{X}) = 40\mathrm{X} + 45 - 45\mathrm{X} \Leftrightarrow \mathbf{V(A, ET) = 45 - 5X}$

Η αξία του παιγνίου για το τηλεοπτικό δίκτυο Α, αν το τηλεοπτικό δίκτυο Β επιλέξει την στρατηγική του ΑΓ είναι ίση με

$\mathrm{V(A, A\Gamma)} = 55 \cdot \mathrm{X} + 25(1 - \mathrm{X}) = 55\mathrm{X} + 25 - 25\mathrm{X} \Leftrightarrow \mathbf{V(A, A\Gamma) = 25 + 30X}$

Η αξία του παιγνίου για το τηλεοπτικό δίκτυο Β, αν το τηλεοπτικό δίκτυο Α επιλέξει την στρατηγική του ΕΤ είναι ίση με

$\mathrm{V(B, ET)} = 40 \cdot \mathrm{Y} + 55(1 - \mathrm{Y}) = 40\mathrm{Y} + 55 - 55\mathrm{Y} \Leftrightarrow \mathbf{V(B, ET) = 55 - 15Y}$

Η αξία του παιγνίου για το τηλεοπτικό δίκτυο Β, αν το τηλεοπτικό δίκτυο Α επιλέξει την στρατηγική του ΕΤ είναι ίση με

$\mathrm{V(B, \Xi T)} = 45 \cdot \mathrm{Y} + 25(1 - \mathrm{Y}) = 45\mathrm{Y} + 25 - 25\mathrm{Y} \Leftrightarrow \mathbf{V(B, \Xi T) = 25 + 20Y}$

Όμως, θα πρέπει $\mathrm{V(A, ET)} = \mathrm{V(A, A\Gamma)} \Leftrightarrow 45 - 5\mathrm{X} = 25 + 30\mathrm{X} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5\mathrm{X} - 30\mathrm{X} = 25 - 45 \Leftrightarrow -35\mathrm{X} = -20 \Leftrightarrow \mathrm{X} = \frac{-20}{-35} \Leftrightarrow \mathbf{X = 0,5714}$

Και αντίστοιχα $1 - \mathrm{X} = 1 - 0{,}5714 \Leftrightarrow \mathbf{1 - X = 0,4286}$

Ομοίως, θα πρέπει $\mathrm{V(B, ET)} = \mathrm{V(B, \Xi T)} \Leftrightarrow 55 - 15\mathrm{Y} = 25 + 20\mathrm{Y} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -15\mathrm{Y} - 20\mathrm{Y} = 25 - 55 \Leftrightarrow -35\mathrm{Y} = -30 \Leftrightarrow \mathrm{Y} = \frac{-30}{-35} \Leftrightarrow \mathbf{Y = 0,8571}$

Και αντίστοιχα $1 - \mathrm{Y} = 1 - 0{,}8571 \Leftrightarrow \mathbf{1 - Y = 0,1429}$

Εφόσον υπολογίσαμε όλες τις παραπάνω πιθανότητες, γνωρίζουμε τις άριστες μικτές στρατηγικές για τον κάθε τηλεοπτικό σταθμό

Άριστη μικτή στρατηγική τηλεοπτικού σταθμού Α : (0 , 0,5714 , 0,4286 , 0)

Άριστη μικτή στρατηγική τηλεοπτικού σταθμού Β : (0 , 0,8571 , 0 , 0,1429)

Για την αξία του παιγνίου έχουμε

$\mathrm{V} = \mathrm{V(A, ET)} = 45 - 5\mathrm{X} = 45 - 5 \cdot 0{,}5714 = 45 - 2{,}2857 = 42{,}143$

Αυτό σημαίνει ότι ο τηλεοπτικός σταθμός A θα προσελκύσει το **42,143%** του τηλεοπτικού κοινού ενώ ο τηλεοπτικός σταθμός B θα προσελκύσει αντίστοιχα το

100%-42,143%=**57,857%**.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Ερώτημα Α

Με την αρχική διαμόρφωση, σχηματίζονται 3 διαφορετικές ουρές αναμονής σε κάθε τηλέφωνο που απαντάει υπάλληλος της τράπεζας. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε 3 παράλληλα σε λειτουργία μοντέλα M/M/1 με τα εξής χαρακτηριστικά για το καθένα:

$\lambda = 3\,\frac{\text{κλήσεις}}{\text{ώρα}}$ και $\mu = 12'$ για την διεκπεραίωση κάθε κλήσης

Επανυπολογίζουμε την τιμή της παραμέτρου μ :

Σε 12’ διεκπεραιώνεται 1 κλήση

Σε 60’ (1 ώρα)διεκπεραιώνονται μ κλήσεις

$$\frac{12}{60} = \frac{1}{\mu} \Leftrightarrow 12 \cdot \mu = 60 \cdot 1 \Leftrightarrow \mu = \frac{60}{12} \Leftrightarrow \mu = 5\,\frac{\text{κλήσεις}}{\text{ώρα}}$$

Αρχικά βρίσκουμε τον βαθμό απασχόλησης του κάθε ενός M/M/1 συστήματος :

$\rho = \frac{3}{5} = 0{,}6 < 1$ άρα υπάρχει ισορροπία

(α)

Τα ενδεχόμενα «άμεση εξυπηρέτηση» και «ο πελάτης να χρειαστεί να περιμένει» είναι αντίθετα. Συνεπώς για την πιθανότητα κάποιος να χρειαστεί να περιμένει θα ισχύει $P_w = 1 - P_0$ όπου P_0 η πιθανότητα να μην βρίσκεται καμία κλήση στο M/M/1 σύστημα, κι ως εκ τούτου κάποιος που καλεί να εξυπηρετείται άμεσα.

Έτσι, έχουμε

$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{3}{5} = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$ η πιθανότητα άμεσης εξυπηρέτησης

Και για την πιθανότητα αναμονής έχουμε

$P_w = 1 - P_0 = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$ ή 60%

(Για το κάθε ένα από τα 3 διαφορετικά συστήματα M/M/1)

(β)

Για τον μέσο χρόνο αναμονής στην κάθε μία ουρά έχουμε

$W_q = \frac{\lambda}{\mu \cdot (\mu - \lambda)} = \frac{3}{5 \cdot (5 - 3)} = \frac{3}{10} = \mathbf{0{,}3}$ ώρες

(γ)

Για τον μέσο χρόνο παραμονής κάθε κλήσης συνολικά στο σύστημα

$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{5 - 3} = \frac{1}{2} = \mathbf{0{,}5}$ ώρες

(δ)

Αρχικά θα βρούμε το μέσο πλήθος κλήσεων συνολικά στο σύστημα για 1 από τα 3 παράλληλα M/M/1 που λειτουργούν

$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{3}{5 - 3} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ κλήσεις

Επομένως συνολικά και στους 3 αριθμούς εξυπηρέτησης έχουμε

$3 \cdot 1{,}5 = \mathbf{4{,}5}$ κλήσεις

(ε)

Για το λειτουργικό κόστος για 1 από τα 3 παράλληλα M/M/1 που λειτουργούν έχουμε

$$TC = WC + SC = c_w \cdot L + c_s \cdot S = 1{,}5 \cdot 1{,}5 + 10 \cdot 1 = 12{,}25 \text{ €/ώρα}$$

Συνεπώς και για τα 3 M/M/1 που λειτουργούν το συνολικό κόστος θα είναι

$$12{,}25 \cdot 3 = \mathbf{36{,}75} \text{€/ώρα}$$

Ερώτημα Β

Μετά την ενοποίηση των τριών ουρών αναμονής σε μία ενιαία, έχουμε πλέον μοντέλο M/M/3. Οι συνολικές κλήσεις που καταφθάνουν στον μοναδικό αριθμό εξυπηρέτησης θα είναι ίσες με το συνολικό πλήθος κλήσεων του προηγούμενου τρόπου λειτουργίας, δηλαδή $3 \cdot 3 = 9 \frac{κλήσεις}{ώρα}$

Άρα για στον νέο τρόπο λειτουργίας έχουμε

$$\lambda = 9 \frac{\text{κλήσεις}}{\text{ώρα}}$$

και

$$\mu = 5 \frac{\text{κλήσεις}}{\text{ώρα}}$$

Για τον βαθμό απασχόλησης του συστήματος έχουμε

$$\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu} = \frac{9}{3 \cdot 5} = \frac{9}{15} = 0{,}6 < 1 \text{ άρα υπάρχει ισορροπία}$$

(α)

Η πιθανότητα κάποιος πελάτης που καλεί να χρειαστεί να περιμένει δίνεται από τον τύπο

$$P_w = \frac{1}{s!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \cdot \left(\frac{s \cdot \mu}{s \cdot \mu - \lambda}\right) \cdot P_0$$

Επομένως πρέπει αρχικά να υπολογιστεί η πιθανότητα να μην βρίσκεται καμία κλήση στο σύστημα P_0 :

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\left[\frac{\left(\lambda/\mu\right)^n}{n!}\right] + \frac{\left(\lambda/\mu\right)^s}{s!}\cdot\frac{s\mu}{(s\mu-\lambda)}} =$$

$$= \frac{1}{\sum_{n=0}^{3-1}\left[\frac{\left(9/5\right)^n}{n!}\right] + \frac{\left(9/5\right)^3}{3!}\cdot\frac{3\cdot 5}{(3\cdot 5-9)}} =$$

$$= \frac{1}{\sum_{n=0}^{2}\left[\frac{(1{,}8)^n}{n!}\right] + \frac{(1{,}8)^3}{3!}\cdot\frac{15}{(15-9)}} =$$

$$= \frac{1}{\left[\frac{(1{,}8)^0}{0!} + \frac{(1{,}8)^1}{1!} + \frac{(1{,}8)^2}{2!}\right] + \frac{(1{,}8)^3}{3!}\cdot\frac{15}{(15-9)}} =$$

$$= \frac{1}{\left[\frac{1}{1} + \frac{1{,}8}{1} + \frac{3{,}24}{1\cdot 2}\right] + \frac{5{,}832}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{15}{6}} = \frac{1}{4{,}42 + \frac{87{,}48}{36}} = \frac{1}{4{,}42 + 2{,}43} = \frac{1}{6{,}85} = 0{,}146$$

Πλέον, έχοντας υπολογίσει την $\mathbf{P_0 = 0,146}$ μπορούμε να υπολογίσουμε την ζητούμενη πιθανότητα αναμονής :

$$P_w = \frac{1}{s!}\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\cdot\left(\frac{s\cdot\mu}{s\cdot\mu-\lambda}\right)\cdot P_0 = \frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{9}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{3\cdot 5}{3\cdot 5-9}\right)\cdot 0{,}146 =$$

$$= \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(1{,}8)^3\cdot\left(\frac{15}{15-9}\right)\cdot 0{,}146 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(1{,}8)^3\cdot\left(\frac{15}{15-9}\right)\cdot 0{,}146 =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 5{,}832\cdot\frac{15}{6}\cdot 0{,}146 = \frac{12{,}772}{36} = 0{,}355$$

Καταλήγουμε ότι η πιθανότητα αναμονής ενός πελάτη που καλεί είναι ίση με

$P_w = \mathbf{0,355}$ ή 35,5%

(β)

Για τον μέσο χρόνο αναμονής ενός πελάτη που καλεί στην ουρά έχουμε

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Επομένως πρέπει αρχικά να υπολογιστεί το πλήθος των πελατών (κλήσεων) σε αναμονή L_q :

$$L_q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \cdot \lambda \cdot \mu}{(s-1)! \cdot (s \cdot \mu - \lambda)^2} \cdot P_0 = \frac{\left(\frac{9}{5}\right)^3 \cdot 9 \cdot 5}{(3-1)! \cdot (3 \cdot 5 - 9)^2} \cdot 0{,}146 =$$

$$= \frac{(1{,}8)^3 \cdot 45}{2! \cdot (15-9)^2} \cdot 0{,}146 = \frac{5{,}832 \cdot 45}{1 \cdot 2 \cdot 6^2} \cdot 0{,}146 = \frac{38{,}316}{2 \cdot 36} =$$

$$= \frac{38{,}316}{72} = 0{,}532 \text{ κλήσεις}$$

Έχοντας υπολογίσει το πλήθος κλήσεων σε αναμονή $\mathbf{L_q = 0{,}532}$ κλήσεις μπορούμε να βρούμε το ζητούμενο μέσο χρόνο αναμονής ενός πελάτη που καλεί την τράπεζα:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0{,}532}{9} = \mathbf{0{,}059} \text{ ώρες}$$

(γ)

Για τον μέσο χρόνο παραμονής στο σύστημα ενός πελάτη (κλήσης) έχουμε

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

Πρέπει, αρχικά, να υπολογίσουμε το συνολικό πλήθος πελατών (κλήσεων) στο σύστημα, L :

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}532 + \frac{9}{5} = 0{,}532 + 1{,}8 = 2{,}332 \text{ κλήσεις}$$

Έχοντας υπολογίσει το πλήθος κλήσεων στο σύστημα (αναμονή κι εξυπηρέτηση) $\mathbf{L = 2{,}332}$ κλήσεις, μπορούμε να βρούμε το ζητούμενο μέσο χρόνο αναμονής μιας κλήσης

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{2{,}332}{9} = \mathbf{0{,}259} \text{ ώρες}$$

(δ)

Το μέσο πλήθος κλήσεων σε αναμονή κι εξυπηρέτηση L υπολογίστηκε στο υποερώτημα (γ) ως εξής

$$\mathrm{L} = \mathrm{L_q} + \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}532 + \frac{9}{5} = 0{,}532 + 1{,}8 = \mathbf{2{,}332} \text{ κλήσεις}$$

(ε)

Για το συνολικό κόστος λειτουργίας με την παρούσα διαμόρφωση του συστήματος (M/M/3) έχουμε :

$$\mathrm{TC} = \mathrm{WC} + \mathrm{SC} = c_w \cdot \mathrm{L} + c_s \cdot \mathrm{S} = 1{,}5 \cdot 2{,}332 + 10 \cdot 3 = 3{,}498 + 30 =$$

$$= \mathbf{33{,}498} \text{ €/ώρα}$$

Ερώτημα Γ

Ο ζητούμενος συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων για κάθε διαφορετικό τρόπο λειτουργίας του συστήματος είναι αυτός που ακολουθεί

Μέγεθος / **Τρόπος Λειτουργίας**	Πιθανότητα αναμονής $\mathbf{P_w}$	Μέσος χρόνος αναμονής $\mathbf{W_q}$ (ώρες)	Μέσος χρόνος παραμονής $\mathbf{W}$ (ώρες)	Μέσο πλήθος κλήσεων (συνολικά) $\mathbf{L}$	Συνολικό κόστος λειτουργίας $\mathbf{TC}$ (€/ώρα)
3 παράλληλα M/M/1 συστήματα (3 ουρές αναμονής)	0,6 ή 60% (για κάθε ένα M/M/1)	0,3	0,5	4,5	36,75
Μοντέλο M/M/3 (Μία ουρά αναμονής)	0,355 ή 35,5%	0,059	0,259	2,332	33,498

Από τον παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι αποδοτικότερος τρόπος λειτουργίας είναι αυτός με το μοντέλο M/M/3 (δηλαδή μια ενιαία ουρά αναμονής) καθώς το συνολικό λειτουργικό κόστος είναι μικρότερο για την τράπεζα κι επιπλέον επιτυγχάνει ταχύτερη εξυπηρέτηση για τους πελάτες που καλούν την τράπεζα.