ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ

ΔΕΟ 13

Eclass4U

The best Choice for you

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ: 11-04-22

ΣΥΝΤΑΚΤΗΣ: ΣΠΥΡΟΣ ΒΛΑΧΟΠΟΥΛΟΣ

Eclass4U
The best Choice for you

ΘΕΡΜΟΠΥΛΩΝ 17
ΠΕΡΙΣΤΕΡΙ

100Μ ΑΠΟ ΤΗ ΣΤΑΣΗ
ΜΕΤΡΟ «ΠΕΡΙΣΤΕΡΙ»

ΤΗΛΕΦΩΝΟ: 210-5711484
ΚΙΝΗΤΟ: 6970401981
EMAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com
ΤΟΠΟΘΕΣΙΑ WEB : www.eclass4u.gr
SOCIAL MEDIA:

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Έχει ως στόχο τη βελτιστοποίηση (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση) μιας γραμμικής συνάρτησης, που παριστά το κριτήριο επίδοσης του συστήματος, κάτω από ένα σύνολο γραμμικών περιορισμών (ανισότητες ή εξισώσεις) που αντιπροσωπεύουν τις συνθήκες κάτω από τις οποίες επιχειρείται. Χρησιμοποιείται για την προσέγγιση του προβλήματος της κατανομής των περιορισμένων πόρων (π.χ. μέσων παραγωγής) ενός συστήματος, σε ανταγωνιστικές μεταξύ τους δραστηριότητες (π.χ. τα διάφορα προϊόντα) κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Οποιοδήποτε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με δύο μόνο μεταβλητές μπορεί να λυθεί γραφικά.

Βήματα

1ο Ορίζουμε τις μεταβλητές απόφασης X_1 και X_2 (ή Χ και Υ)

2ο Καθορίζουμε την αντικειμενική συνάρτηση (στόχος)

3ο Εντοπίζουμε τους περιορισμούς

4ο Βρίσκουμε τις περιοριστικές ευθείες

5ο Χαράσσουμε τις περιοριστικές ευθείες και εντοπίζουμε την εφικτή περιοχή

6ο Βρίσκουμε τις κορυφές της εφικτής περιοχής

7ο Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες των κορυφών στην αντικειμενική συνάρτηση και ανάλογα με το στόχο (μεγιστοποίηση/ελαχιστοποίηση) επιλέγουμε την βέλτιστη λύση.

SITE: www.Eclass4U.gr
Τ. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

Σημεία που πρέπει να προσέξουμε στις ασκήσεις γραμμικού προγραμματισμού

Α. Ο συντελεστής του Y (ή αντίστοιχα X_2) θα πρέπει να φροντίσουμε να είναι θετικός, ώστε μετά την χάραξη της περιοριστικής ευθείας να μην καταλήξουμε σε λάθος συμπέρασμα ως προς το ημιεπίπεδο που θα επιλέξουμε βάσει της ανισότητας που διαθέτουμε.

Παράδειγμα : Αν ο περιορισμός που έχουμε από την εκφώνηση είναι X≥ Y+1, τότε μεταφέροντας το Y στο πρώτο μέλος θα έχουμε X-Y≥1. Δεν θέλουμε, όμως, ο Y να έχει αρνητικό συντελεστή, κι αυτό μπορούμε να το πετύχουμε πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη με -1, ΑΛΛΑΖΟΝΤΑΣ ΤΗΝ ΦΟΡΑ ΤΗΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ! (εφόσον πολλαπλασιάζουμε με αρνητικό αριθμό).

Έτσι, θα έχουμε ισοδύναμα X-Y≥1 ⇔ (-1)·(X-Y)≤(-1)·1 ⇔ -X+Y ≤ -1

Εφόσον ο συντελεστής του Y έγινε θετικός, μπορούμε να χαράξουμε την περιοριστική ευθεία και να επιλέξουμε το ημιεπίπεδο που την επαληθεύει (στην περίπτωσή μας το ημιεπίπεδο «κάτω» από την ευθεία)

Β. Η εφικτή περιοχή είναι δυνατόν να μην είναι ένα κυρτό πολύγωνο, όπως στις περισσότερες ασκήσεις γραμμικού προγραμματισμού, αλλά να είναι ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΗ (να επεκτείνεται απεριόριστα). Σε αυτήν την περίπτωση η μεθοδολογία δεν αλλάζει. Βρίσκουμε, και πάλι, τις συντεταγμένες των κορυφών της εφικτής περιοχής και αντικαθιστούμε, τελικά, στην αντικειμενική συνάρτηση.

(παράδειγμα, λυμένη άσκηση 6)

Γ. Είναι δυνατόν μια περιοριστική ευθεία να διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Δηλαδή να είναι της μορφής α·X+β·Y=0 (και όχι της μορφής α·X+β·Y=γ όπως στις περισσότερες περιπτώσεις). Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να βρούμε τα δύο απαραίτητα σημεία για την χάραξή της μέσω των δυο σημείων τομής με τους άξονες χ'χ και y'y, κι αυτό γιατί τα δυο αυτά σημεία ταυτίζονται στο O(0,0) δηλαδή με την αρχή των αξόνων.

Για παράδειγμα, αν έχουμε την περιοριστική ευθεία 3·X - 2·Y=0

Για X=0 τότε Y=0 (0,0)

Για Y=0 τότε X=0 (0,0)

Επομένως, εκτός του O(0,0) δεν διαθέτουμε το δεύτερο σημείο που χρειαζόμαστε για την χάραξη της ευθείας. Σε αυτές τις περιπτώσεις έχουμε δυο επιλογές. Είτε βρίσκουμε το σημείο τομής της ευθείας με οποιαδήποτε άλλη γνωστή περιοριστική ευθεία του επιπέδου (λύνοντας το σύστημά τους) είτε δίνοντας μια αυθαίρετη τιμή στο X και παίρνοντας την αντίστοιχη τιμή του Y. Στην ευθεία του παραπάνω παραδείγματος,

3·X-2·Y=0, αν X=2 τότε βρίσκουμε Y=3 κι επομένως η ευθεία διέρχεται και από το σημείο (2,3). Έχοντας, πλέον, δυο γνωστά σημεία της (το ένα είναι το 0(0,0) και το δεύτερο το (2,3) που βρήκαμε πιο πάνω) μπορούμε πλέον να την χαράξουμε.

(παραδείγματα, λυμένη άσκηση 5 - υποερώτημα 3, λυμένη άσκηση 6)

SITE: www.Eclass4U.gr T. 210-5711484 KIN. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

ΑΣΚΗΣΗ 1

Η εταιρεία Μαρινόπουλος, συντομογραφία Μ, παράγει δυο προϊόντα, τα Α και Β. Για την παραγωγή μια μονάδας του προϊόντος Α και μιας μονάδας του Β απαιτούνται κεφάλαια 40 και 100 ευρώ αντίστοιχα. Ακόμα, η παραγωγή μιας μονάδας του προϊόντος Α απαιτεί δύο ώρες εργασίας (δύο ανθρωποώρες εργασίας) για την επεξεργασία της ενώ η παραγωγή μιας μονάδας του Β απαιτεί μια ώρα εργασίας. Η εταιρεία Μ θέλει να σχεδιάσει την παραγωγή της για την επόμενη εβδομάδα για την οποία ξέρει τα εξής στοιχεία. Το τμήμα πωλήσεων της Μ ξέρει ότι οι συνολικές πωλήσεις από την παραγωγή της εβδομάδας δεν μπορούν να ξεπεράσουν τις 3000 και για τα δυο προϊόντα. Το μέγιστο κεφάλαιο που μπορεί να διαθέσει η Μ (διαθέσιμο κεφάλαιο) για την παραγωγή της εβδομάδας είναι 200.000 ευρώ. Το εργατικό δυναμικό που η εταιρεία Μ έχει στην διάθεσή της πρέπει (λόγω της κοινωνικής πολιτικής της εταιρείας) οπωσδήποτε να εργαστεί για τουλάχιστον 1000 ώρες συνολικά, στην διάρκεια της εβδομάδας. Τέλος, από το τμήμα κοστολόγησης η Μ ξέρει ότι οι τιμές πώλησης (όχι το κέρδος) των προϊόντων Α και Β κατά την επόμενη εβδομάδα είναι αντίστοιχα 50 και 300 ευρώ.

Με αυτά τα δεδομένα να απαντήσετε στα παρακάτω.

1. Να φτιάξετε το μαθηματικό μοντέλο η λύση του οποίου θα δώσει απάντηση στο ερώτημα της Μ που είναι : Ποιες ποσότητες από το κάθε προϊόν πρέπει να παράγει την επόμενη εβδομάδα αν θέλει να μεγιστοποιήσει τις εισπράξεις της από τις πωλήσεις;
2. Να επιλύσετε το πρόβλημα με την γραφική μέθοδο. Θα πρέπει να βρείτε τις ποσότητες που θα πρέπει να παραχθούν από το κάθε προϊόν καθώς και τις εισπράξεις που θα επιτευχθούν.
3. Θα χρησιμοποιήσει η Μ όλο το διαθέσιμο κεφάλαιο;
4. Πόσες ώρες θα απασχολήσει το ανθρώπινο δυναμικό της;
5. Ο γενικός διευθυντής (Γ.Δ.) της Μ στον οποίο ο προϊστάμενος παραγωγής παρουσίασε το σχέδιο παραγωγής για την επόμενη εβδομάδα, δεν ενδιαφέρεται για τις εισπράξεις αλλά τα κέρδη της εταιρείας. Έτσι, έδιωξε τον προϊστάμενο του τμήματος παραγωγής που του παρουσίασε το πλάνο, με την εντολή, σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα, να του φέρει πίσω το πλάνο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη της Μ. Στην Μ είναι γνωστό ότι το κόστος παραγωγής από τα Α και Β είναι 10 και 60 ευρώ αντίστοιχα. Με αυτά τα δεδομένα, ο προϊστάμενος παραγωγής βρήκε αμέσως ότι το πλάνο παραγωγής (ποσότητες που θα πρέπει να παραχθούν από τα Α και Β) δεν αλλάζει και γύρισε να το αναφέρει στον Γ.Δ. Προσπαθήστε να διαπιστώσετε γιατί συμβαίνει αυτό.
6. Ενώ το πρόβλημα μεγιστοποίησης των εισπράξεων λύθηκε και η Μ ετοίμαζε την παραγωγή της, το τμήμα marketing ενημέρωσε ότι, ναι μεν μπορούν να πωληθούν 3.000 μονάδες συνολικά από τα δύο προϊόντα, αλλά σε καμία περίπτωση οι πωλήσεις από το Β προϊόν δεν μπορούν να ξεπεράσουν τις 2.500 μονάδες. Με αυτήν την πληροφορία πώς αλλάζει, αν αλλάζει, το μοντέλο που βρήκατε στο ερώτημα (1) ; Με το νέο μοντέλο θα χρειαστεί να αλλάξουν τα επίπεδα παραγωγής των δυο προϊόντων που βρέθηκαν στο ερώτημα (2) προκειμένου να μεγιστοποιηθούν οι εισπράξεις με την νέα πληροφορία;
7. Απαντήστε στο ίδιο ερώτημα αν το 2.500 αντικατασταθεί με το 1.000, και αν η απάντησή σας είναι ότι θα πρέπει να αλλάξουν τα επίπεδα παραγωγής των Α και Β, να βρείτε τα νέα επίπεδα.

SITE: www.Eclass4U.gr T. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

Απάντηση

1.

Μεταβλητές απόφασης :

X :η παραγωγή προϊόντος A

Y : η παραγωγή προϊόντος B

Αντικειμενική συνάρτηση (Στόχος)

(max) Z=50X+300Y

Περιορισμοί

40X+100Y≤200.000 (Διαθέσιμα κεφάλαια)

2X+Y≥1000 (ώρες εργασίας)

X+Y≤3000 (συνολική παραγωγή)

X≥0 και Y≥0 (περιορισμοί μη αρνητικότητας)

(η αντικειμενική συνάρτηση με το σύνολο των περιορισμών αποτελούν το ζητούμενο μαθηματικό μοντέλο)

2.

Περιοριστικές ευθείες

40X+100Y=200.000

Για X=0 παίρνουμε 40·0+100Y=200000⇔Y=2000 A(0,2000)

Για Y=0 παίρνουμε 40X+100·0=200000⇔X=5000 B(5000,0)

2X+Y=1000

Για X=0 Y=1000 Γ(0,1000)

Για Y=0 έχουμε 2X+0=1000⇔X=500 Δ(500,0)

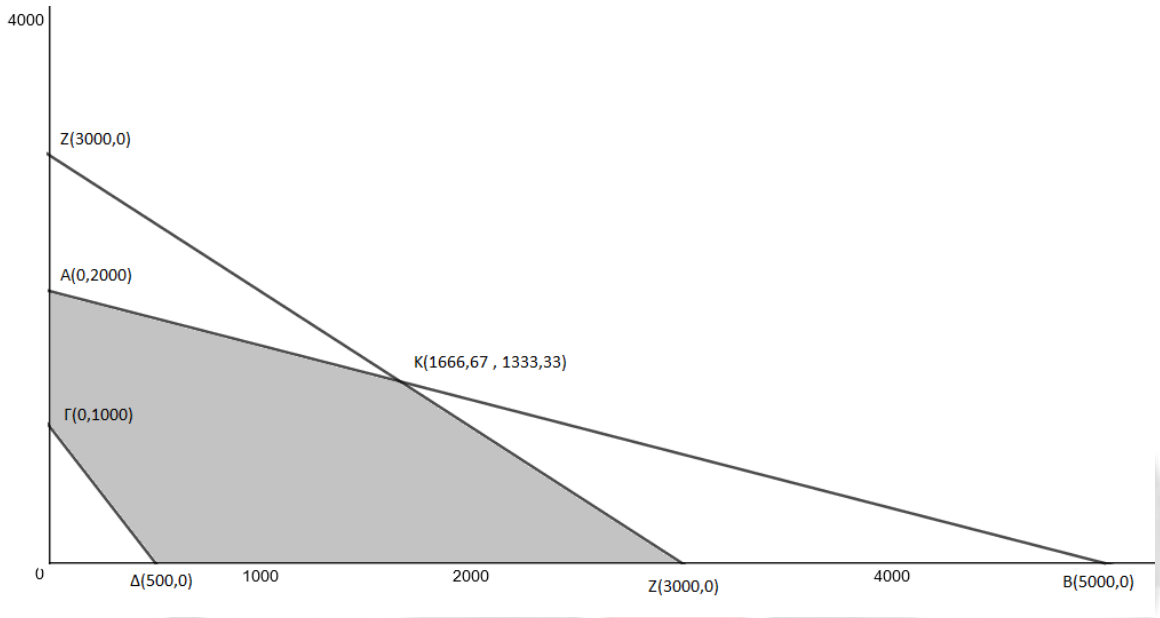
X+Y=3000

Για X=0, Y=3000 E(0,3000)

Για Y=0, X=3000 Z(3000,0)

Έχουμε δυο σημεία για κάθε περιοριστική ευθεία, επομένως μπορούμε για να τις χαράξουμε.

SITE: www.Eclass4U.gr T. 210-5711484 KIN. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com



Χρειαζόμαστε τις συντεταγμένες του σημείου Κ, το οποίο είναι το σημείο τομής των ευθειών

Χ+Υ=3000 και 40Χ+100Υ=200000. Για να βρούμε τις συντεταγμένες του Κ, θα λύσουμε το σύστημα των δύο ευθειών.

$$\begin{cases} 40X+100Y=200000 \\ X+Y=3000 \Leftrightarrow X=3000-Y \ (1) \end{cases}$$

(και αντικαθιστούμε στην πρώτη εξίσωση)

40*(3000-Υ)+100Υ=200000⇔120000-40Υ+100Υ=200000⇔ 60Υ=80000⇔**Υ=1333,33** επομένως από την (1) Χ=3000-1333,33⇔**Χ=1666,67**

Άρα έχουμε τις συντεταγμένες του **Κ(1666,67 ,1333,33)**

Έχουμε χαράξει τις περιοριστικές ευθείες και έχουμε εντοπίσει την εφικτή περιοχή, που είναι το τετράπλευρο που ορίζεται από τις κορυφές ΑΓΔΖΚ. Θα βρούμε τις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης στις κορυφές του τετράπλευρου.

Κορυφές	Χ	Υ	Αντικειμενική συνάρτηση Z=50X+300Y
Α	0	2000	Z=50·0+300·2000=**600.000** **(μέγιστη τιμή)**
Γ	0	1000	Z=50·0+300·1000=300.000
Δ	500	0	Z=50·500+300·0=25.000
Ζ	3000	0	Z=50·3000+300·0=150.000
Κ	1666,67	1333,33	Z=50·1666,67+300·1333,33=83.333,2

Η αντικειμενική συνάρτηση παίρνει την μέγιστη τιμή της στην κορυφή Α(0,2000), επομένως η άριστη τιμή είναι 600.000€ και η άριστη λύση Χ=0 και Υ=2000. Η Μ θα πρέπει να παράξει αυτές τις ποσότητες προϊόντων Α και Β αντίστοιχα για να έχει μέγιστες εισπράξεις 600.000 €

SITE: www.Eclass4U.gr
T. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

3.

Για X=0 και Y=2000 τα κεφάλαια που θα χρησιμοποιηθούν είναι

40·0+100·2000=200.000€, άρα θα χρησιμοποιηθούν όλα τα διαθέσιμα κεφάλαια

4.

Για X=0 και Y=2000 οι ώρες που θα απασχοληθεί το ανθρώπινο δυναμικό είναι

2X+Y=2·0+2000=2000 ώρες

(περισσότερες από τις ελάχιστες που είχαν προσδιοριστεί στις 1000 ώρες)

5.

Για να προσεγγίσουμε εκ νέου το πρόβλημα από την πλευρά του κέρδους, θα πρέπει να υπολογίσουμε το κέρδος της Μ για κάθε προϊόν Α και Β

Για το προϊόν Α

Κόστος παραγωγής ανά μονάδα 10€, είσπραξη ανά μονάδα 50€ επομένως κέρδος για κάθε μονάδα προϊόντος Α είναι 50-10=**40€**

Ομοίως για το προϊόν Β

Κόστος παραγωγής ανά μονάδα 60€, είσπραξη ανά μονάδα 3000€ επομένως κέρδος για κάθε μονάδα προϊόντος Β είναι 300-60=**240€**

Επομένως, το νέο πρόβλημα για την Μ έχει διαμορφωθεί ως εξής :

Αντικειμενική συνάρτηση (Στόχος)

(max) Z=40X+240Y

Περιορισμοί

40X+100Y≤200.000 (Διαθέσιμα κεφάλαια)

2X+Y≥1000 (ώρες εργασίας)

X+Y≤3000 (συνολική παραγωγή)

X≥0 και Y≥0 (περιορισμοί μη αρνητικότητας)

SITE: www.Eclass4U.gr T. 210-5711484 KIN. 6970401981 E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

Εφόσον οι περιορισμοί δεν άλλαξαν, δεν αλλάζουν και οι περιοριστικές ευθείες. Η εφικτή περιοχή του νέου προβλήματος είναι η ίδια με την προηγούμενη. Έχει διαφοροποιηθεί μόνον η αντικειμενική συνάρτηση. Το μόνο που χρειάζεται να κάνουμε, λοιπόν, είναι να αντικαταστήσουμε τις συντεταγμένες των ίδιων κορυφών στην νέα αντικειμενική συνάρτηση.

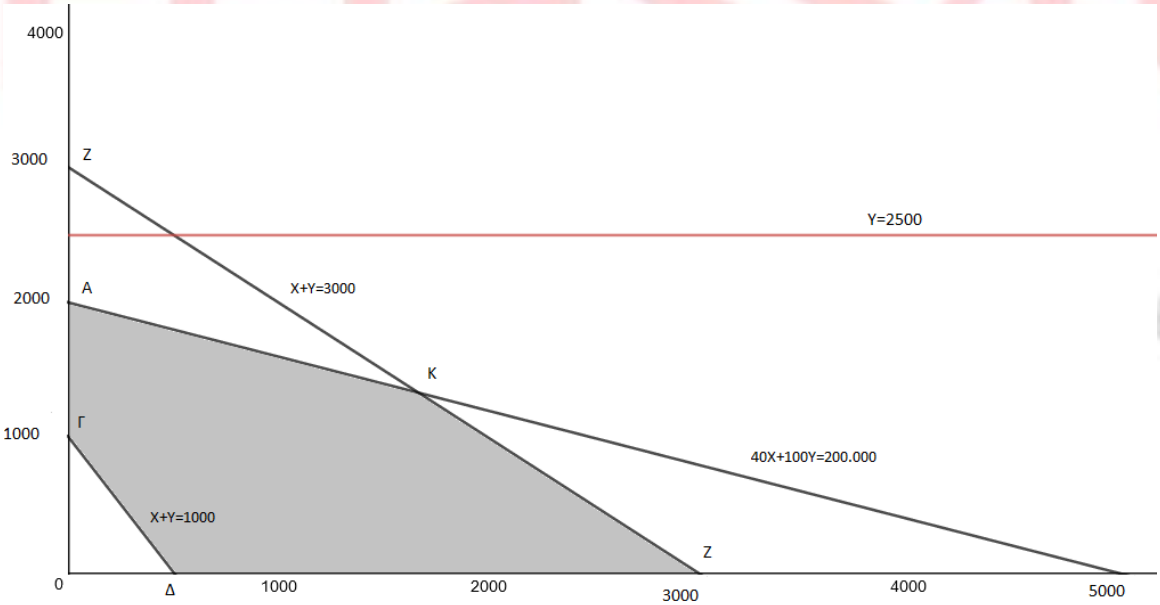
Κορυφές	X	Y	Αντικειμενική συνάρτηση Z=40X+240Y
A	0	2000	Z=40·0+240·2000=**480.000** **(μέγιστη τιμή)**
Γ	0	1000	Z=40·0+240·1000=240.000
Δ	500	0	Z=40·500+240·0=20.000
Z	3000	0	Z=40·3000+240·0=120.000
K	1666,67	1333,33	Z=40·1666,67+240·1333,33=66666,8

Παρατηρούμε ότι η βέλτιστη λύση είναι η ίδια με την προηγούμενη (X=0 και Y=2000). Για αυτό και το πλάνο παραγωγής δεν χρειάζεται να αλλάξει, παρόλο που το νέο μοντέλο επιδιώκει μεγιστοποίηση κερδών, ενώ το παλιό μεγιστοποίηση εισπράξεων.

6.

Έχουμε νέο περιορισμό στο μοντέλο μας, τον Y≤2500 (από περιορισμό πωλήσεων στο B)

Νέα περιοριστική ευθεία Y=2500



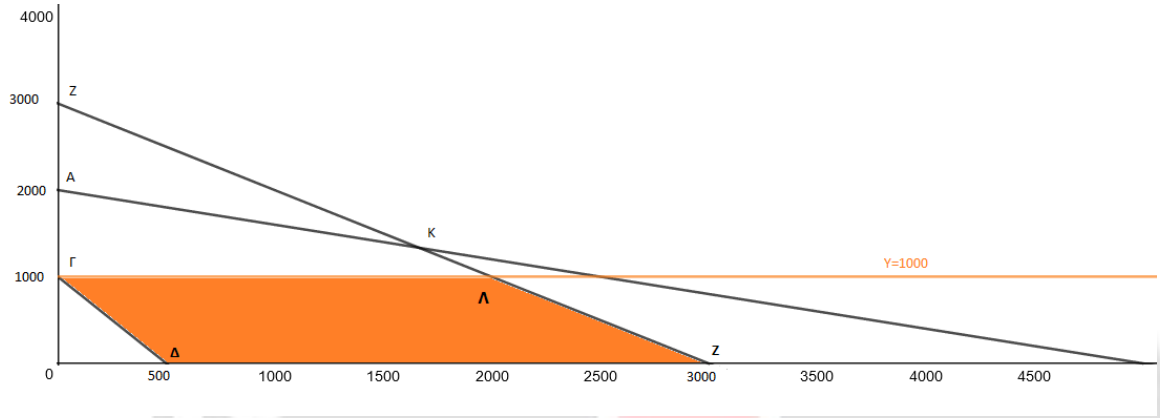
Η Y≤2500 ορίζει το ημιεπίπεδο κάτω από την κόκκινη ευθεία Y=2500. Παρατηρούμε ότι δεν επηρεάζει την εφικτή περιοχή κι επομένως την λύση του προβλήματος.

SITE: www.Eclass4U.gr
T. 210-5711484 KIN. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

7.

Έχουμε νέο περιορισμό Y≤1000

Η νέα περιοριστική ευθεία είναι η Y=1000. Την χαράσσουμε στο υπάρχον σχήμα μας



Η Y≤1000 ορίζει το ημιεπίπεδο κάτω από την πορτοκαλί ευθεία Y=1000

Παρατηρούμε ότι ο νέος περιορισμός επηρεάζει την εφικτή περιοχή, άρα και την λύση του προβλήματος. Η νέα εφικτή περιοχή είναι το τετράπλευρο που ορίζεται από τις κορυφές ΓΔΖΛ.

Για την λύση μας, χρειαζόμαστε τις συντεταγμένες της κορυφής Λ. Το σημείο Λ είναι το σημείο τομής των ευθειών Y=1000 και X+Y=3000, επομένως θα λύσουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων

$$\begin{cases} Y=1000 \text{ (αντικαθιστούμε στην δεύτερη εξίσωση)} \\ X+Y=3000 \Leftrightarrow X+1000=3000 \Leftrightarrow X=2000 \end{cases}$$

Επομένως οι συντεταγμένες του Λ είναι (2000,1000)

Γνωρίζουμε τις συντεταγμένες όλων των κορυφών της εφικτής περιοχής άρα θα βρούμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σε κάθε μια ξεχωριστά

Κορυφές	X	Y	Αντικειμενική συνάρτηση Z=50X+300Y
Z	3000	0	Z=50·3000+300·0=150.000
Δ	500	0	Z=50·500+300·0=25.000
Γ	0	1000	Z=50·0+300·1000=300.000
Λ	1000	2000	Z=50·1000+300·2000=650.000 (μέγιστη τιμή)

Έχουμε βέλτιστη λύση στην κορυφή Λ με X= 1000 και Y=2000. Η εταιρεία θα πετύχει μέγιστες εισπράξεις 650.000€ αν παράξει 1000 τεμάχια προϊόντος Α και 2000 τεμάχια προϊόντος Β

SITE: www.Eclass4U.gr
T. 210-5711484 KIN. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ένα στέλεχος πωλήσεων προγραμματίζει τον αριθμό των επισκέψεων που πρέπει να πραγματοποιήσει τον επόμενο μήνα για την προώθηση δύο προϊόντων Α και Β. Τα δεδομένα που έχει στην διάθεσή του είναι τα ακόλουθα:

- Η προμήθειά του για κάθε επίσκεψη για την προώθηση του προϊόντος Α είναι 10€, ενώ η αντίστοιχη προμήθειά του για την προώθηση του προϊόντος Β είναι 5€.
- Η επίσκεψη για την προώθηση του προϊόντος Α απαιτεί 3 ώρες, ενώ η αντίστοιχη επίσκεψη για την προώθηση του προϊόντος Β απαιτεί 1 ώρα.
- Το στέλεχος έχει στη διάθεσή του τον επόμενο μήνα συνολικά 175 ώρες για την προώθηση των προϊόντων Α και Β. Σύμφωνα με την πολιτική της εταιρείας θα πρέπει να γίνουν τουλάχιστον 20 αλλά όχι περισσότερες από 100 επισκέψεις το μήνα για την προώθηση κάθε προϊόντος.

Α) Να διατυπωθεί το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού που προσδιορίζει τη μέγιστη δυνατή προμήθεια για τον πωλητή και να εξηγηθούν με σαφήνεια τα στοιχεία του.

Β) Να χρησιμοποιηθεί η γραφική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού για να βρεθεί η άριστη λύση και η άριστη τιμή στο παραπάνω πρόβλημα. Να διατυπωθούν τα αποτελέσματα με όρους της εκφώνησης του προβλήματος.

Απάντηση

Α) **Ορίζουμε τις μεταβλητές απόφασης**

Χ : ο αριθμός επισκέψεων για την προώθηση του προϊόντος Α

Υ : ο αριθμός επισκέψεων για την προώθηση του προϊόντος Β

Αντικειμενική συνάρτηση (Στόχος)

(max) Z=10X+5Y

Περιορισμοί

3X+Y≤175 (από τον διαθέσιμο χρόνο του πωλητή)

X≥20 (κατώτατο όριο επισκέψεων για το προϊόν Α)

Y≥20 (κατώτατο όριο επισκέψεων για το προϊόν Β)

X≤100 (ανώτατο όριο επισκέψεων για το προϊόν Α)

Y≤100 (ανώτατο όριο επισκέψεων για το προϊόν Β)

X≥0, Y≥0 (περιορισμοί μη αρνητικότητας)

SITE: www.Eclass4U.gr T. 210-5711484 KIN. 6970401981 E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

Περιοριστικές ευθείες

3X+Y=175

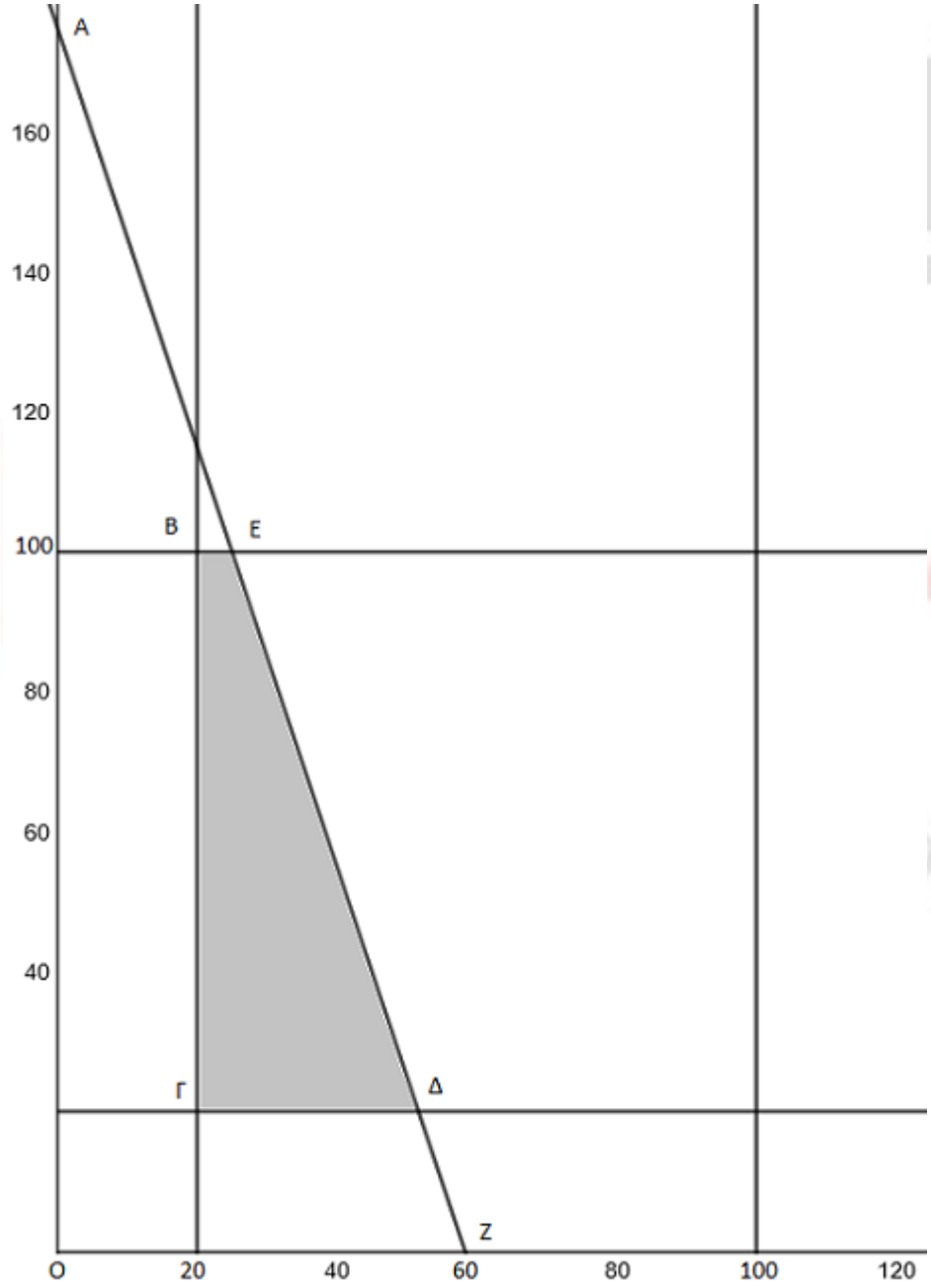
Για να την χαράξουμε, βρίσκουμε τα σημεία τομής με τους άξονες

Για X=0, Y=175 Σημείο A(0,175)

Για Y=0, 3X=175 ⇔ X=58,33 Σημείο Z (58,33 ,0)

Και οι

X=20, Y=20, X=100, Y=100



SITE: www.Eclass4U.gr
T. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

Από τις περιοριστικές ευθείες καταλήγουμε στην εφικτή περιοχή που ορίζεται από το τετράπλευρο με κορυφές ΒΓΔΕ.

Θα πρέπει να βρούμε τις συντεταγμένες των κορυφών

Κορυφή Β : Το σημείο τομής των ευθειών Χ=20 και Υ=100, άρα **Β(20,100)**

Κορυφή Γ : Το σημείο τομής των ευθειών Χ=20 και Υ=20 , άρα **Γ(20,20)**

Κορυφή Δ : Το σημείο τομής των ευθειών Υ=20 και 3Χ+Υ=175

Υ=20 (Αντικαθιστούμε στην δεύτερη εξίσωση)

3Χ+Υ=175⇔3Χ+20=175⇔3Χ=155⇔Χ=51,66

Δ(51,66 , 20)

Κορυφή Ε : Το σημείο τομής των ευθειών Υ=100 και 3Χ+Υ=175

Υ=100 (Αντικαθιστούμε στην δεύτερη εξίσωση)

3Χ+Υ=175⇔3Χ+100=175⇔3Χ=75⇔Χ=25

Ε(25, 100)

Κορυφές	Χ	Υ	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης Ζ=10Χ+5Υ
Β	20	100	Ζ=10·20+5·100=700
Γ	20	20	Ζ=10·20+5·20=300
Δ	51,66	20	Ζ=10·51,66+5·20=616,66
Ε	25	100	10·25+5·100=750 (μέγιστη τιμή)

Επομένως η βέλτιστη λύση είναι Χ=25 επισκέψεις για το προϊόν Α και Υ=100 επισκέψεις για το προϊόν Β, με μέγιστο κέρδος 750€

The best Choice for you

SITE: www.Eclass4U.gr
Τ. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

ΑΣΚΗΣΗ 3

Η “Investment Advisors Inc.”, γνωστό χρηματιστηριακό γραφείο, κατάρτισε για λογαριασμό ενός νέου πελάτη, ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται αποκλειστικά από μετοχές της εταιρείας πετρελαιοειδών “G.B. Oil” και μετοχές της εταιρείας μεταλλικών προϊόντων “Holland Steel”. Τη χρονική στιγμή της αγοράς των μετοχών, η τιμή της μετοχής της G.B. Oil ανέρχεται στα 25€, έχει αναμενόμενη ετήσια απόδοση 3€ και δείκτη κινδύνου 0,50 μονάδες ανά μετοχή, ενώ η τιμή της Holland Steel ανέρχεται στα 50€, έχει αναμενόμενη ετήσια απόδοση 5€ και δείκτη κινδύνου 0,25 μονάδες ανά μετοχή. Ο πελάτης συμφώνησε να επενδύσει 80.000€ με την προϋπόθεση ο συνολικός δείκτης κινδύνου του χαρτοφυλακίου του να μην ξεπεράσει τις 700 μονάδες και να μην υπάρχουν σε αυτό περισσότερες από 1000 μετοχές της G.B. Oil.

Α) Αφού διαπιστώσετε ποιο είναι το πρόβλημα της Investment Advisors Inc., να διαμορφώσετε ένα μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού που μπορεί να το επιλύσει. Εξηγήστε με σαφήνεια τα στοιχεία του.

Β) Χρησιμοποιήστε τη γραφική μέθοδο επίλυσης για να βρείτε την άριστη λύση και την άριστη τιμή του. Διατυπώστε τα αποτελέσματα με όρους της εκφώνησης του προβλήματος.

Απάντηση

Μεταβλητές απόφασης

X : ο αριθμός των μετοχών της G.B. Oil

Y : ο αριθμός των μετοχών της Holland Steel

Αντικειμενική συνάρτηση (Στόχος)

Το κέρδος από κάθε μετοχή είναι ίσο με την αναμενόμενη ετήσια απόδοση, δηλαδή 3€ για κάθε μετοχή της G.B. Oil και 5€ για κάθε μετοχή της Holland Steel. Άρα η αντικειμενική συνάρτηση θα είναι

(max) $Z=3X+5Y$

Περιορισμοί

$25X+50Y\leq 80.000$ (από τον διαθέσιμο προϋπολογισμό)

$0,5X+0,25Y\leq 700$ (από τον μέγιστο δείκτη κινδύνου του χαρτοφυλακίου)

$X\leq 1000$ (μέγιστο πλήθος μετοχών της G.B. Oil)

$X\geq 0$ και $Y\geq 0$ (περιορισμοί μη αρνητικότητας)

Περιοριστικές ευθείες

$25X+50Y=80.000$

Για να την χαράξουμε θα βρούμε τα σημεία τομής με τους άξονες

SITE: www.Eclass4U.gr T. 210-5711484 KIN. 6970401981 E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

Για Χ=0 έχουμε 25·0+50·Υ=80000 ⇔ Υ=1600 Σημείο **Α(0,1600)**

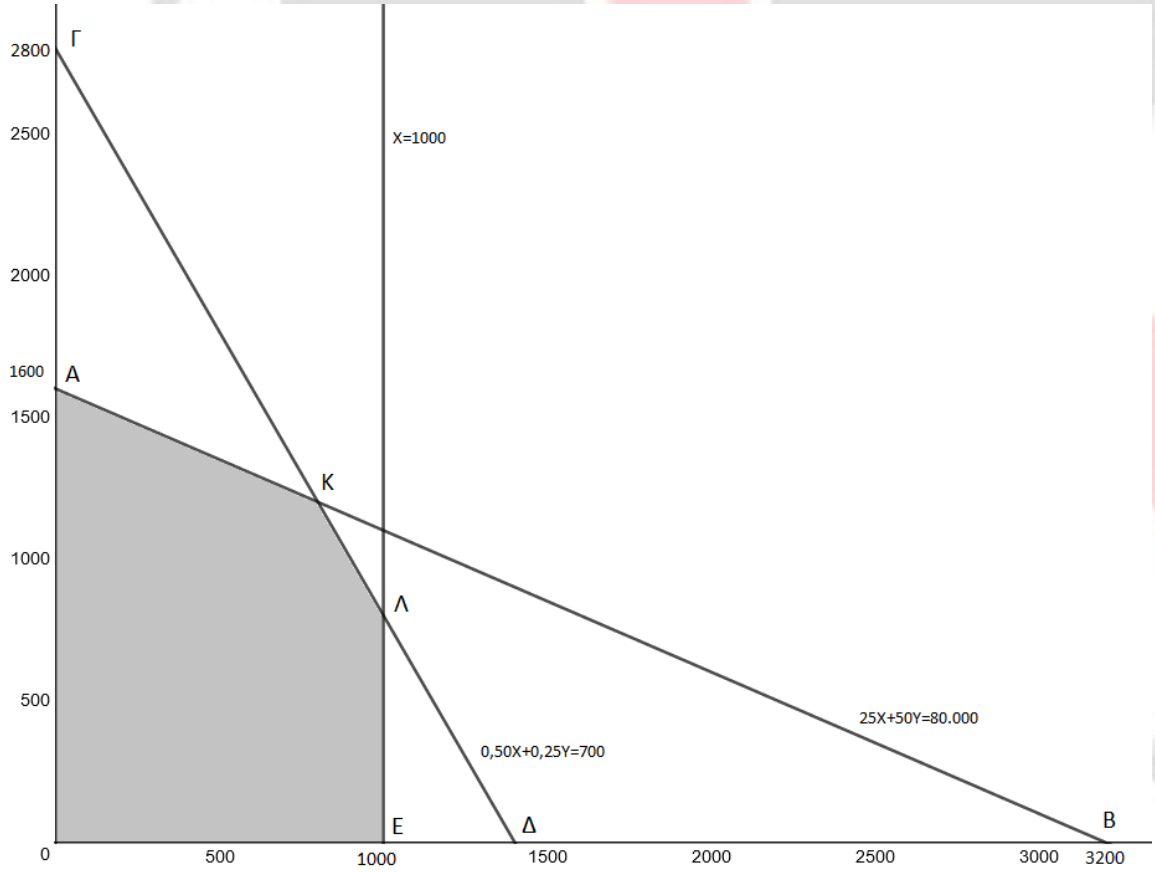
Για Υ=0 έχουμε 25·Χ+50·0=80000⇔ Χ=3200 Σημείο **Β(3200,0)**

0,50Χ+0,25Υ=700

Για Χ=0 έχουμε 0,50·0+0,25·Υ=700⇔ Υ=2800 Σημείο **Γ (0,2800)**

Για Υ=0 έχουμε 0,50·Χ+0,25·0=700⇔ Χ=1400 Σημείο **Δ (1400,0)**

Τρίτη περιοριστική ευθεία η Χ=1000



Η εφικτή περιοχή είναι το πεντάπλευρο με κορυφές ΟΑΚΛΕ

Πρέπει να βρούμε τις συντεταγμένες των κορυφών Κ και Λ

Σημείο Κ

SITE: www.Eclass4U.gr
Τ. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

Είναι το σημείο τομής των ευθειών 25X+50Y=80000 και 0,50X+0,25Y=700. Για να το βρούμε, θα λύσουμε το σύστημα των δυο ευθειών

$$\begin{cases} 25X+50Y=80000 \\ 0{,}50X+0{,}25Y=700 \Leftrightarrow 2\cdot(0{,}50X+0{,}25Y)=2\cdot 700 \Leftrightarrow X+0{,}5Y=1400 \Leftrightarrow X=1400-0{,}5Y \ (1) \end{cases}$$

και αντικαθιστούμε στην πρώτη σχέση του συστήματος :

25(1400-0,5Y) +50Y= 80000⇔ 35000-12,5Y+50Y=80000⇔37,5Y=45000⇔Y=1200

Αντικαθιστούμε στην (1) και παίρνουμε $X=1400-0{,}5\cdot 1200=1400-600=800$

Άρα **Κ (800,1200)**

Σημείο Λ

Είναι το σημείο τομής των ευθειών X=1000 και 0,50X+0,25Y=700. Για να το βρούμε, θα λύσουμε το σύστημα των δυο ευθειών

$$\begin{cases} X=1000 \\ 0{,}50X+0{,}25Y=700 \Leftrightarrow 0{,}50\cdot 1000+0{,}25Y=700 \Leftrightarrow 500+0{,}25Y=700 \Leftrightarrow 0{,}25Y=700-500 \Leftrightarrow Y=800 \end{cases}$$

Άρα **Λ(1000,800)**

Πλέον, γνωρίζουμε τις συντεταγμένες όλων των κορυφών της εφικτής περιοχής. Θα φτιάξουμε τον πίνακα μέσω του οποίου θα αναζητήσουμε την λύση

Κορυφές	X	Y	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης Z=3X+5Y
Ο	0	0	Z=3·0+5·0=0
Α	0	1600	Z=3·0+5·1600=8000
Κ	800	1200	Z=3·800+5·1200=8400 (μέγιστη τιμή)
Λ	1000	800	Z=3·1000+5·800=7000
Ε	1000	0	Z=3·1000+5·0=3000

Έχουμε άριστη λύση για 800 μετοχές G.B. Oil και 1200 μετοχές Holland Steel και άριστη τιμή ετήσια απόδοση 8.400€

SITE: www.Eclass4U.gr T. 210-5711484 KIN. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

ΑΣΚΗΣΗ 4

Σε ένα φοροτεχνικό γραφείο εργάζονται 5 λογιστές, 4 βοηθοί και 4 γραμματείς, ο καθένας πλήρως απασχολούμενος 40 ώρες την εβδομάδα. Οι τιμές της αγοράς για την προετοιμασία φορολογικών δηλώσεων είναι 65€ για δήλωση φυσικού προσώπου και 150€ για δήλωση επιχείρησης, ενώ η εβδομαδιαία ζήτηση και για τους δυο τύπους δηλώσεων είναι μεγάλη. Για την προετοιμασία μιας δήλωσης φυσικού προσώπου απαιτούνται 1 ώρα απασχόλησης λογιστή και 1 ώρα απασχόλησης γραμματέως. Η δήλωση επιχείρησης απαιτεί 2 ώρες απασχόλησης λογιστή, 2 ώρες απασχόλησης βοηθού και 1 ώρα απασχόλησης γραμματέως. Εν' όψει της περιόδου υποβολής φορολογικών δηλώσεων, τα στελέχη του γραφείου θέλουν να υπολογίσουν τα μέγιστα δυνατά εβδομαδιαία έσοδά του.

1) Διαμορφώστε το μαθηματικό μοντέλο που προσδιορίζει τα μέγιστα δυνατά εβδομαδιαία έσοδα του φοροτεχνικού γραφείου. Εξηγήστε με σαφήνεια τα στοιχεία του.
2) Χρησιμοποιήστε τη γραφική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού για να βρείτε την άριστη λύση και την άριστη τιμή στο παραπάνω πρόβλημα. Διατυπώστε τα αποτελέσματα με όρους της εκφώνησης του προβλήματος.

Απάντηση

Μεταβλητές απόφασης

X : Πλήθος δηλώσεων φυσικού προσώπου

Y : Πλήθος δηλώσεων επιχείρησης

Αντικειμενική συνάρτηση (Στόχος)

(max) $Z=65X+140Y$

Περιορισμοί

Ο κάθε εργαζόμενος απασχολείται 40 ώρες εβδομαδιαίως. Επομένως, οι 5 λογιστές εργάζονται συνολικά $5\cdot40=200$ ώρες, οι 4 βοηθοί συνολικά $4\cdot40=160$ ώρες και οι 4 γραμματείς $4\cdot40=160$ ώρες.

$X+2Y\leq200$ (από τις διαθέσιμες ώρες των λογιστών)

$2Y\leq160$ (από τις διαθέσιμες ώρες των βοηθών)

$X+Y\leq160$ (από τις διαθέσιμες ώρες των γραμματέων)

$X\geq0$ και $Y\geq0$ (περιορισμοί μη αρνητικότητας)

SITE: www.Eclass4U.gr T. 210-5711484 KIN. 6970401981 E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

Περιοριστικές Ευθείες

X+2Y=200 Για τα να την χαράξουμε, θα βρούμε τα σημεία τομής με τους άξονες.

Για X=0, έχουμε 0+2Y=200⇔Y=100 Σημείο **Α(0,100)**

Για Y=0, έχουμε X+2·0=200⇔X=200 Σημείο **Β(200,0)**

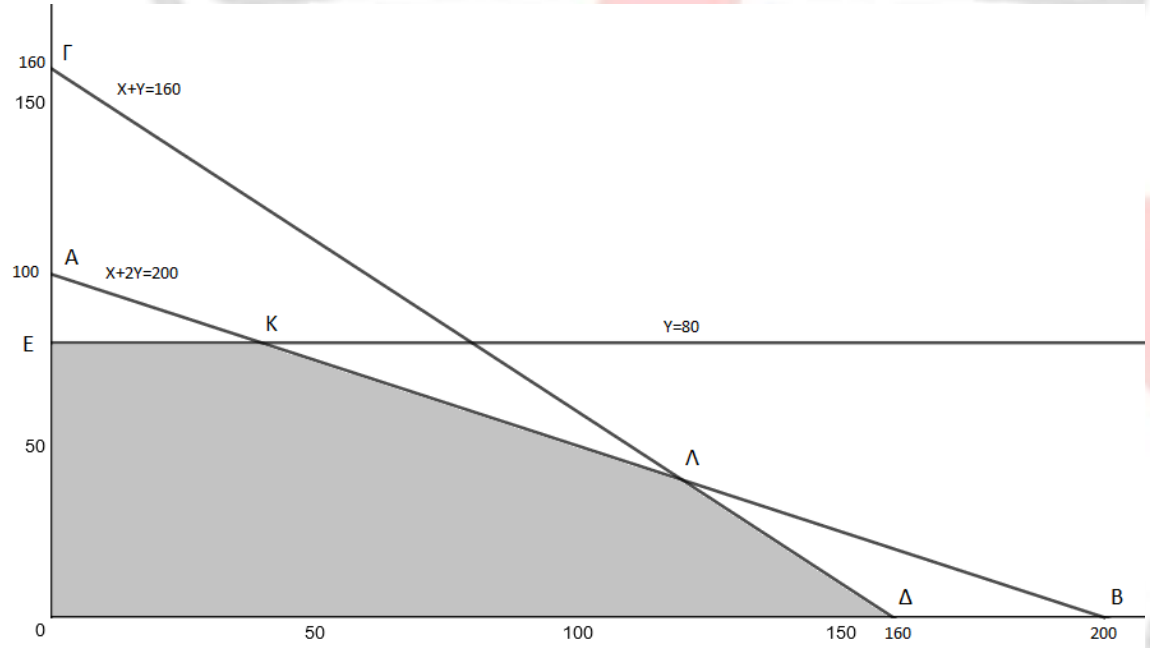
X+Y=160

Για X=0 έχουμε Y=160 Σημείο **Γ(0,160)**

Για Y=0 έχουμε X=160 Σημείο **Δ(160,0)**

2Y=160 ⇔Y=80 Σημείο τομής με τον άξονα των Y το **Ε(0,80)**

Μπορούμε, πλέον, να χαράξουμε όλες τις περιοριστικές ευθείες



Η εφικτή περιοχή είναι το πεντάπλευρο που ορίζεται από τις κορυφές ΟΕΚΛΔ . Πρέπει να βρούμε τις κορυφές Κ και Λ

Κορυφή Κ

Είναι το σημείο τομής των ευθειών X+2Y=200 και Y=80. Για να βρούμε τις συντεταγμένες του Κ θα λύσουμε το σύστημα των δύο ευθειών

$$\begin{cases} Y=80 \\ X+2Y=200 \Leftrightarrow X+2\cdot 80=200 \Leftrightarrow X=40 \end{cases}$$ Σημείο **Κ(200,80)**

SITE: www.Eclass4U.gr
T. 210-5711484 KIN. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

Κορυφή Λ

Είναι το σημείο τομής των ευθειών X+2Y=200 και X+Y=160. Για να βρούμε τις συντεταγμένες του Κ θα λύσουμε το σύστημα των δύο ευθειών

$$\begin{cases} X+2Y=200 \Leftrightarrow X=200-2Y \ (1) \ \text{(αντικαθιστούμε στην δεύτερη σχέση)} \\ X+Y=160 \Leftrightarrow 200-2Y+Y=160 \Leftrightarrow -Y=-40 \Leftrightarrow Y=40 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε στην σχέση (1) και έχουμε X=200-2·40=200-80=120 Σημείο **Λ(120,40)**

Έχουμε, πλέον, τις συντεταγμένες όλων των κορυφών της εφικτής περιοχής κι επομένως μπορούμε να φτιάξουμε τον πίνακα με τις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης.

Κορυφές	X	Y	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης Z=65X+140Y
Ο	0	0	Z=65·0+140·0=0
Ε	0	80	Z=65·0+140·80=11200
Κ	40	80	Z=65·40+140·80=13800=2600+11200=13800(μέγιστη τιμή)
Λ	120	40	Z=65·120+140·40=7800+5600=13400
Δ	160	0	Z=65·160+140·0=10400

Επομένως η άριστη λύση του προβλήματος είναι X=40 δηλώσεις φυσικού προσώπου και Y=80 δηλώσεις επιχείρησης με άριστη τιμή την συνολική αμοιβή 13.800 €

Eclass4U
The best Choice for you

SITE: www.Eclass4U.gr
T. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

ΑΣΚΗΣΗ 5

Μια εταιρεία εισάγει στην αγορά δύο νέους τύπους προϊόντων Π_1 και Π_2. Ιστορικά στατιστικά στοιχεία που τηρεί η εταιρεία δείχνουν ότι για την πώληση ενός προϊόντος Π_1 απαιτούνται 3 ώρες ενώ για την πώληση ενός προϊόντος Π_2 6 ώρες. Για τον επόμενο μήνα η εταιρεία διαθέτει συνολικό χρόνο 630 ωρών για την πώληση των δύο αυτών προϊόντων και έχει θέσει ως στόχο την πώληση 25 προϊόντων από τον κάθε τύπο. Επιπλέον είναι γνωστό ότι από την πώληση κάθε προϊόντος Π_1 ή Π_2 η εταιρεία κερδίζει 40 ή 50 Ευρώ αντίστοιχα.

Με βάση τα στοιχεία αυτά:

i. Να διαμορφωθεί το μαθηματικό μοντέλο που προσδιορίζει το βέλτιστο αριθμό προϊόντων που πρέπει να πωληθούν από τον κάθε τύπο κατά τον επόμενο μήνα.
Να εξηγηθούν με σαφήνεια τα στοιχεία του

ii. Να χρησιμοποιηθεί η γραφική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού για να βρεθεί η άριστη λύση και η άριστη τιμή του προβλήματος.
Να διατυπωθούν τα αποτελέσματα με όρους της εκφώνησης του προβλήματος

iii. Υποθέτουμε ότι η διοίκηση της εταιρείας θέτει ως επιπλέον στόχο για τον επόμενο μήνα, ότι ο αριθμός των προϊόντων τύπου Π_2 που θα πουληθούν να είναι τουλάχιστον ίσος με τον αριθμό των προϊόντων τύπου Π_1. Να διατυπωθεί μαθηματικά ο νέος περιορισμός, να επαναπροσδιορισθεί η εφικτή περιοχή και να βρεθεί η νέα άριστη λύση και η άριστη τιμή του προβλήματος

Απάντηση

1)

Μεταβλητές απόφασης

X : Ο αριθμός προϊόντων Π1

Y : Ο αριθμός προϊόντων Π2

Αντικειμενική συνάρτηση

(max) $Z= 40\cdot X+50\cdot Y$

Περιορισμοί

$3\cdot X+6\cdot Y\leq 630$ (από τον διαθέσιμο χρόνο πώλησης)

$X\geq 25$ (από την στοχοθεσία του προϊόντος Π1)

$Y\geq 25$ (από την στοχοθεσία του προϊόντος Π2)

$X,Y\geq 0$ (περιορισμοί μη αρνητικότητας)

SITE: www.Eclass4U.gr T. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

2)

Περιοριστικές ευθείες

3X+6Y=630 Για τα να την χαράξουμε, θα βρούμε τα σημεία τομής με τους άξονες.

Για X=0 Έχουμε 3·0+6·Y=630⇔Y=105 Άρα έχουμε το σημείο A(0,105)

Για Y=0 Έχουμε 3X+6·0=630⇔X=210 Άρα βρήκαμε το B(210,0)

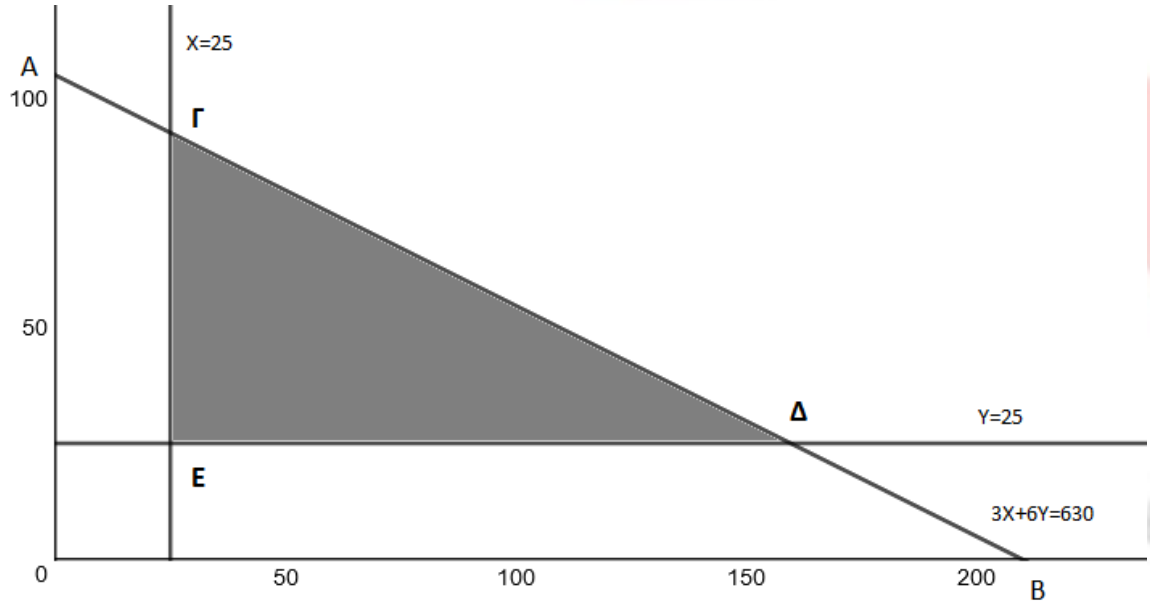
X=25 Είναι η κατακόρυφη ευθεία, παράλληλη στον Y'Y η οποία διέρχεται από το (25,0)

Λόγω του περιορισμού X≥25, παίρνουμε το ημιεπίπεδο δεξιά της ευθείας

Y=25 Είναι η οριζόντια ευθεία, παράλληλη στον X'X η οποία διέρχεται από το (0,25)

Λόγω του περιορισμού Y≥25, παίρνουμε το ημιεπίπεδο πάνω από την ευθεία.

Μπορούμε να χαράξουμε τις περιοριστικές ευθείες



Η εφικτή περιοχή είναι το τρίγωνο με κορυφές ΓΕΔ

Πρέπει να βρούμε τις συντεταγμένες των κορυφών Γ, Δ, Ε

Το Ε είναι το σημείο τομής των ευθειών X=25 και Y=25 άρα **E(25,25)**

Το Γ είναι το σημείο τομής των ευθειών X=25 και 3X+6Y=630

Θα λύσουμε το σύστημα των δυο ευθειών

SITE: www.Eclass4U.gr
T. 210-5711484 KIN. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

$$\begin{cases} X=25 \\ 3X+6Y=630 \Leftrightarrow 3\cdot 25+6Y=630 \Leftrightarrow 75+6Y=630 \Leftrightarrow 6Y=630-75 \Leftrightarrow Y=92,5 \end{cases}$$

Άρα **Γ (25,92,5)**

Το Δ είναι το σημείο τομής των ευθειών Y=25 και 3X+6Y=630, για να βρούμε τις συντεταγμένες λύνουμε το σύστημα των ευθειών.

$$\begin{cases} Y=25 \\ 3X+6Y=630 \Leftrightarrow 3X+6\cdot 25=630 \Leftrightarrow 3X+150=630 \Leftrightarrow 3X=630-150 \Leftrightarrow X=160 \end{cases}$$

Άρα **Δ(160,25)**

Έχουμε, πλέον, τις συντεταγμένες όλων των κορυφών της εφικτής περιοχής κι επομένως μπορούμε να φτιάξουμε τον πίνακα με τις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης.

Κορυφές	**X**	**Y**	**Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης Z=40·X+50·Y**
Γ	25	92,5	Z=40·25+50·92,5=1000+4625=5625
Δ	160	25	Z=40·160+50·25=6400+1250=7650 (Μέγιστη τιμή)
Ε	25	25	Z=40·25+50·25=1000+1250=2250

Άρα η βέλτιστη λύση βρίσκεται στην κορυφή Δ (160, 25) δηλαδή 160 τεμάχια προϊόντος Π1 και 25 τεμάχια προϊόντος Π2 και μέγιστο αναμενόμενο κέρδος 7650 €

3)

Η διοίκηση της εταιρείας προσθέτει έναν νέο περιορισμό στους ήδη υπάρχοντες του μοντέλου.

Ο νέος περιορισμός είναι ο Y≥X⇔**Y-X≥0**

Η νέα περιοριστική ευθεία είναι η Y-X=0 η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων

(για X=0 παίρνουμε Y=0). Επομένως για την χάραξή της χρειαζόμαστε κι ένα δεύτερο σημείο εκτός του Ο (0,0)

Θα βρούμε το σημείο τομής της με μια από τις ήδη υπάρχουσες ευθείες του σχήματός μας.

Έστω το σημείο τομής της με την Y=25. Θα λύσουμε το σύστημα των δυο ευθειών

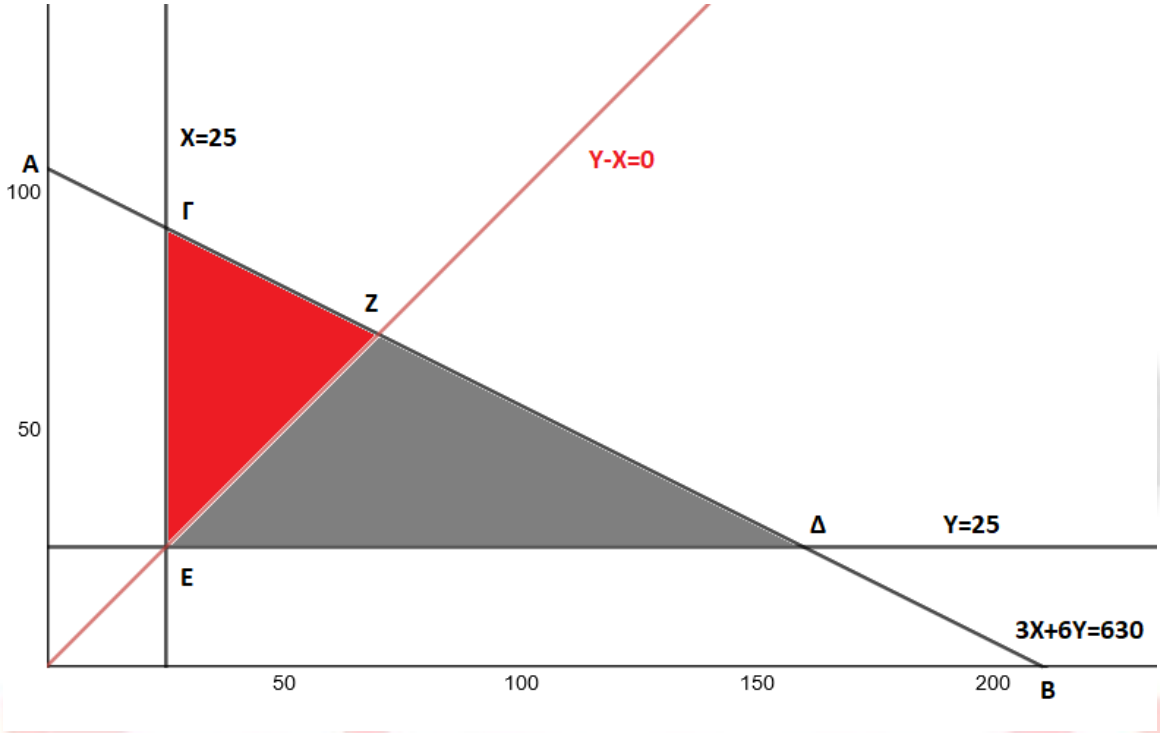
$$\begin{cases} Y=25 \\ Y-X=0 \Leftrightarrow 25-X=0 \Leftrightarrow X=25 \end{cases}$$

Άρα το σημείο τομής είναι το (25,25) το οποίο έχουμε ήδη ορίσει στο σχήμα μας. *(τα σημεία της ευθείας Y-X=0 ή αλλιώς της Y=X έχουν ίδια τετμημένη με τεταγμένη, επομένως ήταν αναμενόμενο ότι θα διέρχεται από το Ε(25,25).)*

SITE: www.Eclass4U.gr T. 210-5711484 KIN. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

Έχουμε δυο σημεία της νέας περιοριστικής ευθείας κι επομένως μπορούμε να την χαράξουμε, παίρνοντας ως λύση το ημιεπίπεδο **πάνω** από την ευθεία, λόγω της ανισότητας Y-X≥0

Το νέο σχήμα, μετά την προσθήκη της νέας περιοριστικής ευθείας διαμορφώνεται ως εξής



Η νέα εφικτή περιοχή είναι το τρίγωνο ΕΓΖ

Θα βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου Z, το οποίο είναι το σημείο τομής των ευθειών

Y-X=0 και 3X+6Y=630. Επομένως, θα λύσουμε το σύστημα των δυο ευθειών

$$\begin{cases} Y-X=0 \Leftrightarrow \mathbf{Y=X} \\ 3X+6Y=630 \Leftrightarrow 3X+6X=630 \Leftrightarrow 9X=630 \Leftrightarrow X=70 \text{ και από την πρώτη εξίσωση επίσης } Y=70 \end{cases}$$

Z(70,70)

Eclass4U
The best Choice for you

SITE: www.Eclass4U.gr
T. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

Πλέον, μπορούμε να φτιάξουμε τον πίνακα με τις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης.

Κορυφές	**X**	**Y**	**Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης Z=40·X+50·Y**
Γ	25	92,5	Z=40·25+50·92,5=1000+4625=5625
Ζ	70	70	Z=40·70+50·70=2800+3500=6300 (Μέγιστη τιμή)
Ε	25	25	Z=40·25+50·25=1000+1250=2250

Άρα η βέλτιστη λύση βρίσκεται στην κορυφή Ζ (70, 70) δηλαδή 70 τεμάχια προϊόντος Π1 και 70 τεμάχια προϊόντος Π2 και μέγιστο αναμενόμενο κέρδος 6300 €

Eclass4U
The best Choice for you

SITE: www.Eclass4U.gr
T. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

ΑΣΚΗΣΗ 6

Δίνεται το παρακάτω γραμμικό μοντέλο:

$$\text{Min } Z = 2x_1 + 4x_2$$

με περιορισμούς:

$$74x_1 + 102x_2 \geq 3000$$
$$-1{,}48x_1 + 1{,}02x_2 \geq 0$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Να χρησιμοποιηθεί η γραφική μέθοδος επίλυσης για να βρεθεί η άριστη λύση και η άριστη τιμή του μοντέλου.

Απάντηση

Εδώ μας δίνεται το μαθηματικό μοντέλο (αντικειμενική συνάρτηση και περιορισμοί) και μας ζητείται να κάνουμε κατευθείαν την γραφική επίλυση

Περιοριστικές ευθείες

$74X_1+102X_2=3000$

Θα βρούμε τα σημεία τομής με τους άξονες

Για $X_1=0$ έχουμε $74\cdot0+102\cdot X_2=3000 \Leftrightarrow X_2=29{,}41$ **Σημείο Α(0, 29,41)**

Για $X_2=0$ έχουμε $74\cdot X_1+102\cdot0=3000 \Leftrightarrow X_1=40{,}54$ **Σημείο Β(40,54, 0)**

Μπορούμε να χαράξουμε την πρώτη ευθεία και θα πάρουμε το ημιεπίπεδο «πάνω» από αυτήν, λόγω της ανισότητας

$-1{,}48\cdot X_1+1{,}02\cdot X_2=0$ Για $X_1=0$ έχουμε $X_2 = 0$ Άρα η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Χρειαζόμαστε κι ένα δεύτερο σημείο της για να μπορέσουμε να την σχεδιάσουμε. Το δεύτερο, αυτό σημείο θα είναι το σημείο τομής της με την ήδη υπάρχουσα $74X_1+102X_2=3000$

Θα λύσουμε το σύστημα των δύο ευθειών

$$\begin{cases} 74X_1+102X_2=3000 \\ -1{,}48\cdot X_1+1{,}02\cdot X_2=0 \end{cases}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την δεύτερη σχέση με -100 τότε ο συντελεστής του X_2 θα είναι ο αντίθετος από αυτόν της πρώτης σχέσης, κι έτσι προσθέτοντας κατά μέλη ο X_2 θα φύγει (μέθοδος αντιθέτων συντελεστών)

Άρα, μετά τον πολλαπλασιασμό της δεύτερης με -100 το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} 74X_1+102X_2=3000 \\ 148\cdot X_1-102\cdot X_2=0 \end{cases}$$ και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$222\cdot X_1=3000 \Leftrightarrow \boldsymbol{X_1=13{,}51}$

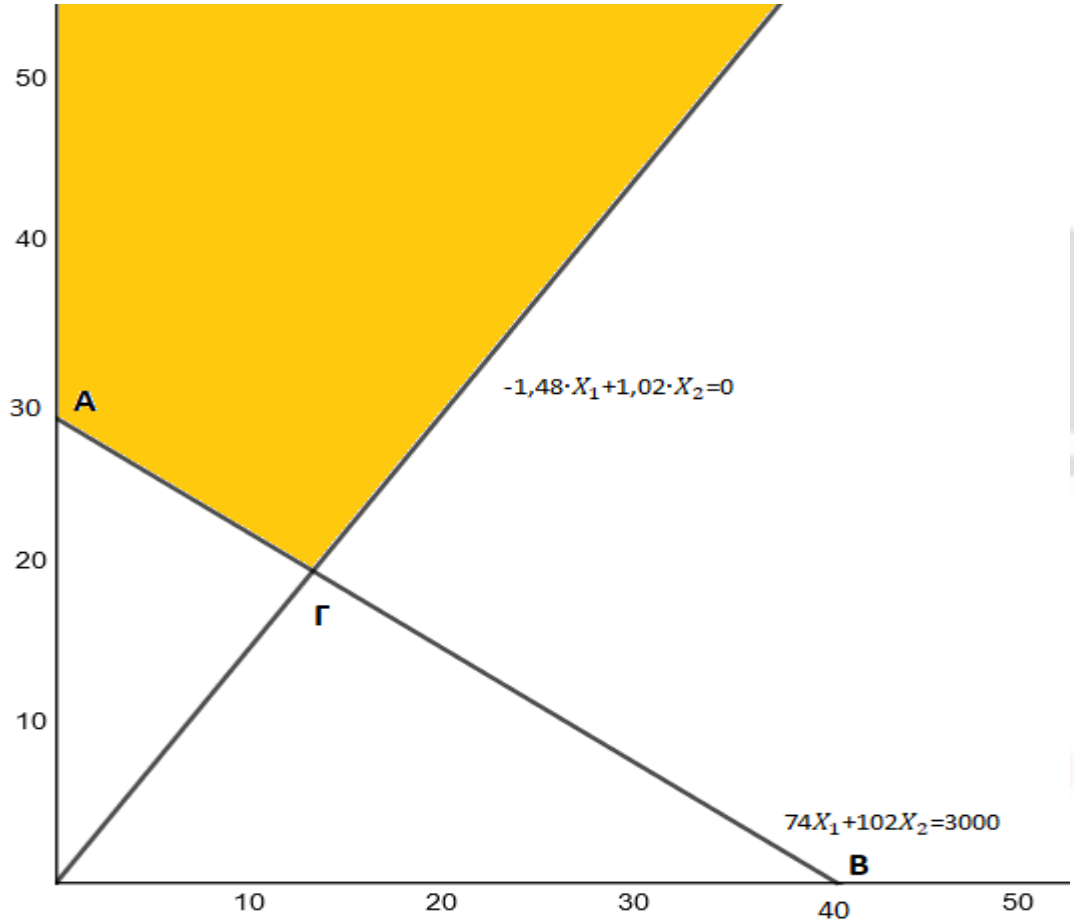
SITE: www.Eclass4U.gr T. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

Και αντικαθιστώντας σε οποιαδήποτε από τις δυο σχέσεις θα βρούμε το αντίστοιχο X_2

74· 13,51+102X_2=3000⇔999,74+102·X_2=3000⇔102X_2=2000,26⇔$\boldsymbol{X_2}$**=19,61**

Άρα έχουμε βρει και το δεύτερο σημείο που χρειαζόμασταν, το **Γ (13,51 , 19,61)**

Μπορούμε, πλέον, να χαράξουμε τις περιοριστικές ευθείες



Παρατηρούμε ότι, αντίθετα με όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις, η εφικτή περιοχή δεν περιορίζεται από ένα κυρτό πολύγωνο, αλλά επεκτείνεται απεριόριστα προς τα πάνω. Σε μια τέτοια περίπτωση έχουμε **μη φραγμένη εφικτή περιοχή**. Παρόλα αυτά, δεν αλλάζει κάτι στην αντιμετώπιση της άσκησης. Παίρνουμε τις συντεταγμένες των κορυφών (στην περίπτωσή μας των σημείων Α και Γ) και αντικαθιστούμε στην αντικειμενική συνάρτηση στον πίνακα που κατασκευάζουμε σε κάθε ανάλογη περίπτωση.

Έτσι, έχουμε

Κορυφές	$\boldsymbol{X_1}$	$\boldsymbol{X_2}$	**Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης Z=2·$\boldsymbol{X_1}$+4·$\boldsymbol{X_2}$**
Α	0	29,,41	Z=2·0+4·29,41=117,64
Γ	13,51	19,61	Z=2·13,51+4·19,61=27,02+78,44=105,46 (ελάχιστη τιμή)

Επομένως η άριστη λύση βρίσκεται στο σημείο Γ και είναι η X_1=13,51 και X_2=19,61 και άριστη τιμή 105,46.

SITE: www.Eclass4U.gr
T. 210-5711484 KIN. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Μια βιομηχανία παραγωγής χυμών φρούτων διαθέτει 2000 κιλά πορτοκάλια για την παραγωγή χυμού σε δύο συσκευασίες, μικρή και μεγάλη, με αντίστοιχο κέρδος 300 και 800 νομισματικές μονάδες ανά κουτί. Το μικρό μέγεθος απαιτεί για την παρασκευή του 0,1 ώρες εργασίας και 1 κιλό πορτοκάλια ανά κουτί, ενώ το μεγάλο μέγεθος απαιτεί 0,3 ώρες εργασίας και 2 κιλά πορτοκάλια ανά κουτί. Για την αντιμετώπιση της ζήτησης η παραγωγή πρέπει να έχει ολοκληρωθεί μέσα σε μια ημέρα και προς το σκοπό αυτό η βιομηχανία διαθέτει 30 εργαζόμενους το κανονικό ωράριο των οποίων είναι 8 ώρες εργασίας την ημέρα.

(α) Διαμορφώστε το μαθηματικό μοντέλο που εντοπίζει το άριστο σχέδιο παραγωγής με βάση τη μεγιστοποίηση του κέρδους.

(β) Να προσδιορισθεί γραφικά η βέλτιστη λύση του μοντέλου.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ένα κεντρικό βιβλιοπωλείο ειδικεύεται στα λογοτεχνικά βιβλία και τα βιβλία τέχνης. Προκειμένου να προωθήσει μια νέα συλλογή λογοτεχνικών βιβλίων και βιβλίων τέχνης, η διεύθυνση του βιβλιοπωλείου σκοπεύει να τις διαθέσει σε πολύ χαμηλές τιμές. Συγκεκριμένα εξετάζει μια ενέργεια προώθησης των πωλήσεων των νέων συλλογών όπου οι τιμές των βιβλίων είναι τόσο χαμηλές ώστε: Το βιβλιοπωλείο χάνει 3 ευρώ σε κάθε λογοτεχνικό βιβλίο και 2 ευρώ σε κάθε βιβλίο τέχνης που πωλείται στην προώθηση. Η διεύθυνση σχεδιάζει να πωλήσει τουλάχιστον 210 βιβλία συνολικά, ενώ στο κατάστημα μπορούν να διατεθούν μέχρι 900 μονάδες χώρου επίδειξης για την ενέργεια αυτή. Ο διευθυντής γνωρίζει ότι κάθε λογοτεχνικό βιβλίο απαιτεί 3 μονάδες χώρου επίδειξης, ενώ τα βιβλία τέχνης απαιτούν 2 μονάδες αντίστοιχα.

(i). Να διαμορφωθεί το μαθηματικό μοντέλο που προσδιορίζει πόσα λογοτεχνικά βιβλία και πόσα βιβλία τέχνης θα πρέπει να παραγγείλει το βιβλιοπωλείο ώστε να χάσει το μικρότερο δυνατό ποσό σε αυτήν την προώθηση πωλήσεων. Να εξηγηθούν με σαφήνεια τα στοιχεία του μοντέλου.

(ii). Να χρησιμοποιηθεί η γραφική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού για να βρεθεί η άριστη λύση και η άριστη τιμή του μοντέλου. Να διατυπωθούν τα αποτελέσματα με βάση τα στοιχεία της εκφώνησης του προβλήματος.

SITE: www.Eclass4U.gr
T. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

ΑΣΚΗΣΗ 3

Σε ένα εργοστάσιο επίπλων σε μία συγκεκριμένη παραγωγική περίοδο παράγονται τραπέζια και καθίσματα. Ένα τραπέζι χρειάζεται για την κατασκευή του, 2 ώρες εργασίας για την κοπή ξύλου, 1 ώρα εργασίας για την συναρμολόγηση και 3 ώρες για τη βαφή. Ενα κάθισμα χρειάζεται 2 ώρες εργασίας για την κοπή ξύλου, 2 ώρες εργασίας για την συναρμολόγηση και 1,5 ώρες για τη βαφή του. Στο τμήμα κοπής είναι διαθέσιμες 200 ώρες, στο τμήμα συναρμολόγησης 120 ώρες και στο τμήμα βαφής είναι διαθέσιμες 180 ώρες. Η επιχείρηση έχει μοναδιαίο περιθώριο κέρδους 50 ευρώ από κάθε τραπέζι και αντίστοιχα 30 ευρώ από κάθε κάθισμα.

α) Να διαμορφωθεί το μαθηματικό μοντέλο που προσδιορίζει τον βέλτιστο αριθμό προϊόντων που πρέπει να παραχθούν από τον κάθε τύπο ώστε να μεγιστοποιείται το συνολικό κέρδος. Να εξηγηθούν με σαφήνεια τα στοιχεία του.

β) Να χρησιμοποιηθεί η γραφική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού για να βρεθεί η άριστη λύση και η άριστη τιμή του προβλήματος. Να διατυπωθούν τα αποτελέσματα με βάση τα στοιχεία της εκφώνησης του προβλήματος.

γ) Υποθέτουμε ότι η επιχείρηση καταφέρνει να μειώσει σε κάποια φάση της παραγωγής το κόστος για τα τραπέζια και αυτό έχει ως αποτέλεσμα το μοναδιαίο περιθώριο κέρδους για το προϊόν αυτό να αυξηθεί και να γίνει ίσο με 60 ευρώ. Να βρεθεί η νέα άριστη λύση και η άριστη τιμή του προβλήματος.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Μια εταιρεία εισάγει στην αγορά δύο νέους τύπους προϊόντων Π_1 και Π_2. Ιστορικά στατιστικά στοιχεία που τηρεί η εταιρεία δείχνουν ότι για την πώληση ενός προϊόντος Π_1 απαιτούνται 3 ώρες ενώ για την πώληση ενός προϊόντος Π_2 6 ώρες. Για τον επόμενο μήνα η εταιρεία διαθέτει συνολικό χρόνο 630 ωρών για την πώληση των δύο αυτών προϊόντων και έχει θέσει ως στόχο την πώληση 25 προϊόντων από τον κάθε τύπο. Επιπλέον είναι γνωστό ότι από την πώληση κάθε προϊόντος Π_1 ή Π_2 η εταιρεία κερδίζει 40 ή 50 Ευρώ αντίστοιχα.
Με βάση τα στοιχεία αυτά:

i. Να διαμορφωθεί το μαθηματικό μοντέλο που προσδιορίζει το βέλτιστο αριθμό προϊόντων που πρέπει να πωληθούν από τον κάθε τύπο κατά τον επόμενο μήνα. Να εξηγηθούν με σαφήνεια τα στοιχεία του

ii. Να χρησιμοποιηθεί η γραφική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού για να βρεθεί η άριστη λύση και η άριστη τιμή του προβλήματος. Να διατυπωθούν τα αποτελέσματα με όρους της εκφώνησης του προβλήματος

iii. Υποθέτουμε ότι η διοίκηση της εταιρείας θέτει ως επιπλέον στόχο για τον επόμενο μήνα, ότι ο αριθμός των προϊόντων τύπου Π_2 που θα πουληθούν να είναι τουλάχιστον ίσος με τον αριθμό των προϊόντων τύπου Π_1. Να διατυπωθεί μαθηματικά ο νέος περιορισμός, να επαναπροσδιορισθεί η εφικτή περιοχή και να βρεθεί η νέα άριστη λύση και η άριστη τιμή του προβλήματος

SITE: www.Eclass4U.gr T. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

ΑΣΚΗΣΗ 5

Μια εταιρία κατασκευάζει δύο προϊόντα $Π_1$ και $Π_2$ σε τρεις γραμμές παραγωγής Α, Β και C. Οι απαιτήσεις σε ώρες εργασίας ανά μονάδα προϊόντος, για κάθε προϊόν σε καθεμία από τις τρεις γραμμές παραγωγής, δίνονται στον παρακάτω Πίνακα.

Απαιτήσεις σε ώρες εργασίας

ΓΡΑΜΜΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ	ΠΡΟΙΟΝΤΑ	
	$Π_1$	$Π_2$
A	1,50	3,00
B	2,00	1,00
C	0,25	0,25

Ο υπεύθυνος παραγωγής εκτιμά ότι για τον επόμενο μήνα οι διαθέσιμες ώρες εργασίας στις τρεις γραμμές παραγωγής Α, Β και C είναι 450, 350 και 50 αντίστοιχα. Είναι, τέλος, γνωστό ότι από την πώληση κάθε προϊόντος $Π_1$ ή $Π_2$ η εταιρεία κερδίζει 25 ή 30 ευρώ αντίστοιχα. Με βάση τα στοιχεία αυτά:

i. Να διαμορφωθεί το μαθηματικό μοντέλο που προσδιορίζει το βέλτιστο αριθμό προϊόντων που πρέπει να κατασκευασθούν και να πωληθούν από τον κάθε τύπο κατά τον επόμενο μήνα ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος της εταιρείας. Να εξηγηθούν με σαφήνεια τα στοιχεία του

ii. Να χρησιμοποιηθεί η γραφική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού για να βρεθεί η άριστη λύση και η άριστη τιμή του προβλήματος. Να διατυπωθούν τα αποτελέσματα με όρους της εκφώνησης του προβλήματος

iii. Να υπολογισθεί πόσες ώρες εργασίας θα χρησιμοποιηθούν σε κάθε γραμμή παραγωγής και πόσες θα περισσέψουν με βάση τις αντίστοιχα διαθέσιμες.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Ένας τραπεζικός οργανισμός σχεδιάζει να επενδύσει έως 100 εκατομμύρια ευρώ σε χορηγήσεις δανείων και σε αγορές ομολόγων. Η τρέχουσα απόδοση των χορηγουμένων δανείων είναι 10% και των υπό αγορά ομολόγων είναι 5%. Αντίθετα, ο πιστωτικός κίνδυνος των χορηγούμενων δανείων είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο της αγοράς ομολόγων. Τέλος, με βάση ιστορικά στοιχεία που τηρούνται, η διοίκηση της τράπεζας θεωρεί ότι για να επιτευχθεί υψηλή απόδοση της επένδυσης και παράλληλα να περιοριστεί ο πιστωτικός κίνδυνος θα πρέπει το ποσό που θα επενδυθεί στην αγορά των ομολόγων να μην είναι μικρότερο του 1/3 του ποσού που θα επενδυθεί στην χορήγηση των δανείων και το σύνολο της επένδυσης σε ομόλογα να μην υπερβαίνει τα 20 εκατομμύρια ευρώ.

Με βάση τα στοιχεία αυτά

(i) Να διατυπωθεί το μαθηματικό μοντέλο που προσδιορίζει τη μέγιστη δυνατή συνολική απόδοση για τον τραπεζικό οργανισμό και να εξηγηθούν με σαφήνεια τα στοιχεία του.

(ii) Να χρησιμοποιηθεί η γραφική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού και να βρεθεί η άριστη λύση και η άριστη τιμή στο παραπάνω πρόβλημα. Να διατυπωθούν τα αποτελέσματα με όρους της εκφώνησης του προβλήματος.

SITE: www.Eclass4U.gr T. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981 E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

ΠΑΛΙΟΤΕΡΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ένα οινοποιείο παράγει δύο τύπους κρασιού, Λευκό και Κόκκινο, χρησιμοποιώντας δύο ποικιλίες σταφυλιών Α και Β. Για κάθε κιβώτιο Λευκού απαιτούνται 25 κιλά σταφύλια ποικιλίας Α και 20 κιλά σταφύλια ποικιλίας Β. Ενώ, για κάθε κιβώτιο Κόκκινου, απαιτούνται 20 κιλά σταφύλια ποικιλίας Α και 8 κιλά σταφύλια ποικιλίας Β. Το οινοποιείο, κάθε εβδομάδα, έχει στη διάθεσή του 50 τελάρα σταφύλια ποικιλίας Α και 30 τελάρα σταφύλια ποικιλίας Β. Κάθε τελάρο περιέχει 20 κιλά σταφύλια. Το οινοποιείο έχει μία σύμβαση με μία κάβα, σύμφωνα με την οποία θα πρέπει να της παραδίδει κάθε εβδομάδα τουλάχιστον 10 κιβώτια κρασιού από τους δύο τύπους συνολικά. Η ζήτηση τόσο για Λευκό όσο και για Κόκκινο κρασί είναι πρακτικά απεριόριστη, επομένως όλη η παραγωγή του οινοποιείου μπορεί να διατεθεί στην αγορά. Κάθε κιβώτιο Λευκού κρασιού αποφέρει καθαρό κέρδος 120 ευρώ ενώ κάθε κιβώτιο Κόκκινου αποφέρει καθαρό κέρδος 80 ευρώ.

Α. Να διαμορφώσετε το κατάλληλο μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού προκειμένου να εντοπιστεί το σχήμα παραγωγής που μεγιστοποιεί το συνολικό κέρδος του οινοποιείου. Να εξηγήσετε τα στοιχεία του μοντέλου με σαφήνεια. **(15%)**

Β. Να χρησιμοποιήσετε τη γραφική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού για να βρείτε την άριστη λύση και το μέγιστο κέρδος του οινοποιείου (θεωρήστε ότι το οινοποιείο μπορεί να παράγει και κιβώτια που δεν είναι πλήρη, οπότε το πλήθος των παραγόμενων κιβωτίων μπορεί να πάρει και δεκαδικές τιμές). Να διατυπώσετε τα αποτελέσματα με βάση τα στοιχεία της εκφώνησης του προβλήματος. **(10%)**

Eclass4U
The best Choice for you

SITE: www.Eclass4U.gr
Τ. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

ΑΣΚΗΣΗ 2

(4.Β) Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται η γραφική παράσταση των περιορισμών του προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού:

Μεγιστοποίηση $Z = 12X + 40Y$

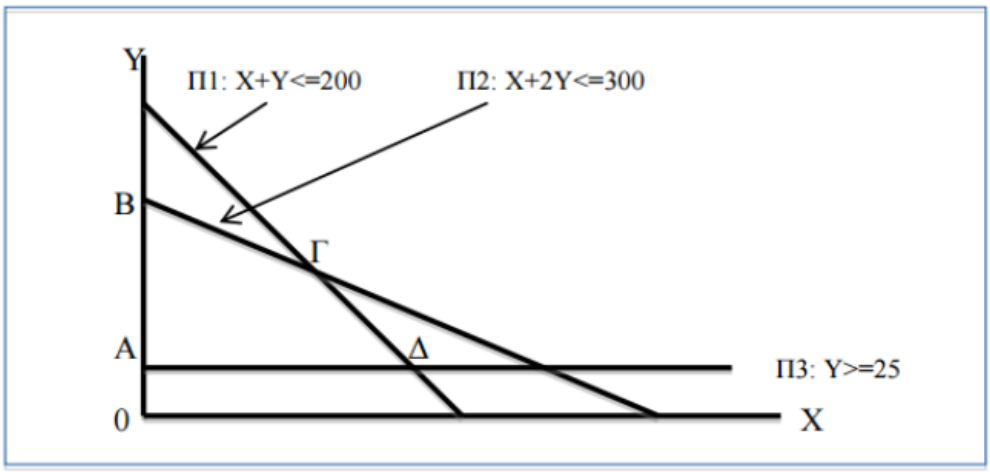
Υπό τους περιορισμούς

Π1: $X + Y <= 200$

Π2: $X + 2Y <= 300$

Π3: $Y >= 25$

$X, Y>=0$



Προσδιορίστε αλγεβρικά τη βέλτιστη λύση του προβλήματος. **(5%)**

Eclass4U
The best Choice for you

SITE: www.Eclass4U.gr
Τ. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ένα οινοποιείο παράγει δύο τύπους κρασιού: το Λευκό Νέκταρ (ΛΝ) και την Κόκκινη Κοιλάδα (ΚΚ). Τα κρασιά αυτά παράγονται από 64 τόνους σταφυλιών που η επιχείρηση έχει αποκτήσει αυτήν την οινική περίοδο. Η οινοποίηση μίας (τυποποιημένης) δεξαμενής ΛΝ απαιτεί 4 τόνους σταφυλιών, ενώ η οινοποίηση μίας (τυποποιημένης) δεξαμενής ΚΚ απαιτεί 8 τόνους σταφυλιών. Για να ωριμάσει το περιεχόμενο μιας οποιαδήποτε δεξαμενής απαιτείται η τοποθέτηση της σε έναν υπόγειο χώρο αποθήκευσης, όπου κάθε μία εκ των δεξαμενών απαιτεί 5 κυβικά μέτρα (m^3). Ο χρόνος επεξεργασίας που χρειάζεται για μια δεξαμενή ΛΝ είναι 15 ώρες ενώ ο αντίστοιχος χρόνος επεξεργασίας για μια δεξαμενή ΚΚ είναι 20 ώρες. Η διαθέσιμη χωρητικότητα της αποθήκης ανέρχεται σε 50 κυβικά μέτρα υπόγειου χώρου για την ωρίμανση των κρασιών, ενώ το οινοποιείο διαθέτει συνολικά 240 ώρες χρόνου επεξεργασίας. Εκτιμάται, ότι η μέγιστη δυνατή ζήτηση για κάθε τύπο κρασιού ανέρχεται σε ποσότητα ισοδύναμη του περιεχομένου 7 δεξαμενών κρασιού. Το κέρδος από την πώληση ποσότητας μίας δεξαμενής κρασιού ΛΝ είναι 9.000 ευρώ και το κέρδος από την πώληση ποσότητας μίας δεξαμενής κρασιού ΚΚ ανέρχεται σε 12.000 ευρώ. Η επιχείρηση θέλει να καθορίσει το πλήθος των δεξαμενών από ΛΝ και από ΚΚ που πρέπει να παράγει προκειμένου να μεγιστοποιήσει το κέρδος της.

Ζητείται να:

1.1) Να διατυπώσετε ένα μοντέλο Γραμμικού Προγραμματισμού προκειμένου να προσδιορίσετε πόσες δεξαμενές πρέπει να οινοποιηθούν από κάθε τύπο κρασιού έτσι ώστε η επιχείρηση να μεγιστοποιήσει το κέρδος της. Να εξηγηθούν με σαφήνεια τα στοιχεία του μοντέλου. **(15%)**

1.2) Χρησιμοποιώντας την γραφική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού να σκιαγραφηθεί ο χώρος των εφικτών λύσεων, να σημειωθούν οι κορυφές του και στη συνέχεια να βρεθεί η άριστη λύση και η άριστη τιμή του μοντέλου το οποίο διατυπώσατε στο προηγούμενο ερώτημα. Να εκφραστούν τα αποτελέσματα με βάση τα στοιχεία της εκφώνησης του προβλήματος. **(10%)**

[Σημειώστε, ότι μπορούν να οινοποιηθούν και κλάσματα δεξαμενών].

Eclass4U
The best Choice for you

SITE: www.Eclass4U.gr
T. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com

ΑΣΚΗΣΗ 4

(5Α) Μία τράπεζα σχεδιάζει μια νέα διαφημιστική εκστρατεία στο ραδιόφωνο και την τηλεόραση. Μια διαφήμιση στο ραδιόφωνο κοστίζει 300 Ευρώ, ενώ μία διαφήμιση στην τηλεόραση κοστίζει 2000 Ευρώ. Ο συνολικός προϋπολογισμός της διαφημιστικής εκστρατείας ανέρχεται σε 20000 Ευρώ. Ο διευθυντής marketing κρίνει ότι το συνολικό ποσό που θα διατεθεί στο ραδιόφωνο δεν μπορεί να υπερβαίνει το 75% του προϋπολογισμού ενώ για την τηλεόραση το αντίστοιχο όριο είναι 85%. Εκτιμάται ότι από κάθε διαφήμιση στο ραδιόφωνο θα ενδιαφερθούν 2000 δυνητικοί πελάτες. Στην τηλεόραση οι αντίστοιχες εκτιμήσεις είναι 3000 δυνητικοί πελάτες για κάθε διαφήμιση. Το μαθηματικό μοντέλο που προσδιορίζει το σχεδιασμό της διαφημιστικής εκστρατείας έτσι ώστε να μεγιστοποιείται το σύνολο των δυνητικών πελατών που θα ενδιαφερθούν και από τα δύο μέσα διαμορφώνεται ως εξής:

$$\text{Max } Z = 2000X_1+3000X_2$$

με περιορισμούς:

$$300X_1+2000X_2 \leq 20000$$
$$300X_1 \leq 15000$$
$$2000X_2 \leq 17000$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

όπου

X_1= αριθμός διαφημίσεων στο ραδιόφωνο,

X_2= αριθμός διαφημίσεων στην τηλεόραση.

Να χρησιμοποιηθεί η γραφική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού για να βρεθεί η άριστη λύση και η άριστη τιμή του μοντέλου. Να διατυπωθούν τα αποτελέσματα με βάση τα στοιχεία της εκφώνησης του προβλήματος. ***Να θεωρήσετε ότι το πλήθος των διαφημίσεων στα δύο μέσα μπορεί να πάρει και δεκαδικές τιμές.*** **(15%)**

Eclass4U
The best Choice for you

SITE: www.Eclass4U.gr | **Τ. 210-5711484 ΚΙΝ. 6970401981**
E-MAIL:grammateia.eclass4u@gmail.com