ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Μέθοδοι πρόβλεψης

από το συνοδευτικό βιβλίο : Σ. Γ. Δημητριάδης, Α. Ν. Μιχιώτης, '*ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ : Βασικές θεωρητικές αρχές και εφαρμογές στη λήψη διοικητικών αποφάσεων*', 2η έκδοση, εκδόσεις Κριτική, 2020.

Μέθοδοι Πρόβλεψης

- Στα πλαίσια αυτού του κεφαλαίου θα μας απασχολήσουν αποκλειστικά προβλήματα πρόβλεψης της ζήτησης σε τελικά προϊόντα, που θα κληθεί να αντιμετωπίσει ένα παραγωγικό σύστημα στο μέλλον.
- Αρχικά θα περιγράψουμε τα βασικά στάδια, που πρέπει να ακολουθούμε σε κάθε διαδικασία πρόβλεψης και ακολούθως θα αναφερθούμε στα μεθοδολογικά εργαλεία, που έχουμε σήμερα στη διάθεσή μας για την προκαταρκτική διερεύνηση των αριθμητικών δεδομένων αλλά και για τον έλεγχο της εγκυρότητας και της αξιοπιστίας των αποτελεσμάτων της πρόβλεψής μας.
- Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε αναλυτικά τις πιο σημαντικές από τις μεθόδους πρόβλεψης, οι οποίες πιστεύουμε ότι καλύπτουν επαρκώς τις βασικές ανάγκες σε στρατηγικό και τακτικό επίπεδο λειτουργίας μιας οποιασδήποτε επιχείρησης.
- Στην παρουσίαση αυτή θα δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στη χρήση των μεθόδων πρόβλεψης στην πράξη, με την υποστήριξη του ευρύτατα σήμερα διαδεδομένου υπολογιστικού περιβάλλοντος λογιστικών φύλλων (spreadsheets) του προγράμματος Excel της Microsoft.

Η σημασία των προβλέψεων και μεθοδολογικές κατευθύνσεις 1/8

Η **γνώση των μελλοντικών τιμών διαφόρων μεγεθών**, που έχουν σχέση με το περιβάλλον και τα αποτελέσματα από την καθημερινή λειτουργία μιας επιχείρησης (όπως για παράδειγμα τα έσοδα και ο όγκος των πωλήσεων, το ύψος της ζήτησης των παραγομένων προϊόντων ή των νέων προϊόντων που πρόκειται να παραχθούν, οι τεχνολογικές εξελίξεις, κ.ά.), **είναι απολύτως απαραίτητη**, μια και μόνο σ' αυτή τη γνώση μπορούμε να στηρίξουμε τη λήψη των κατάλληλων (βέλτιστων) επιχειρηματικών αποφάσεων, για τη σχεδίαση και τον προγραμματισμό της καλής λειτουργίας της.

Η επιτυχία επομένως μιας επιχείρησης, μιας οργάνωσης γενικά, **εξαρτάται κατά πολύ από την ικανότητα της διοίκησής της να αποκτά έγκυρες και αξιόπιστες προβλέψεις** για τις μελλοντικές τιμές των διαφόρων αυτών μεταβλητών, που επηρεάζουν την καθημερινή λειτουργία της.

Η σημασία των προβλέψεων και μεθοδολογικές κατευθύνσεις 2/8

Οι μελλοντικές τιμές της ζήτησης ενός προϊόντος ή ενός οποιουδήποτε οικονομικού, φυσικού ή άλλου μεγέθους γενικότερα, διαμορφώνονται συνήθως κάτω από την επίδραση ενός πλήθους δομικών παραγόντων, οι οποίοι επενεργούν κατά ένα εξαιρετικά πολύπλοκο και πολλές φορές άγνωστο τρόπο.

Γενικά, **τρεις είναι οι μεθοδολογικά διαφορετικές διαδικασίες πρόβλεψης**, τις οποίες μπορούμε να εφαρμόζουμε κατά περίπτωση και πιο συγκεκριμένα :

(α) οι **μέθοδοι ανάλυσης χρονοσειρών και προβολής της τάσης**,

(β) οι **αιτιοκρατικές μέθοδοι ή μέθοδοι ανάλυσης των δομικών παραγόντων** και

(γ) οι **ποιοτικές μέθοδοι ή μέθοδοι κρίσης**.

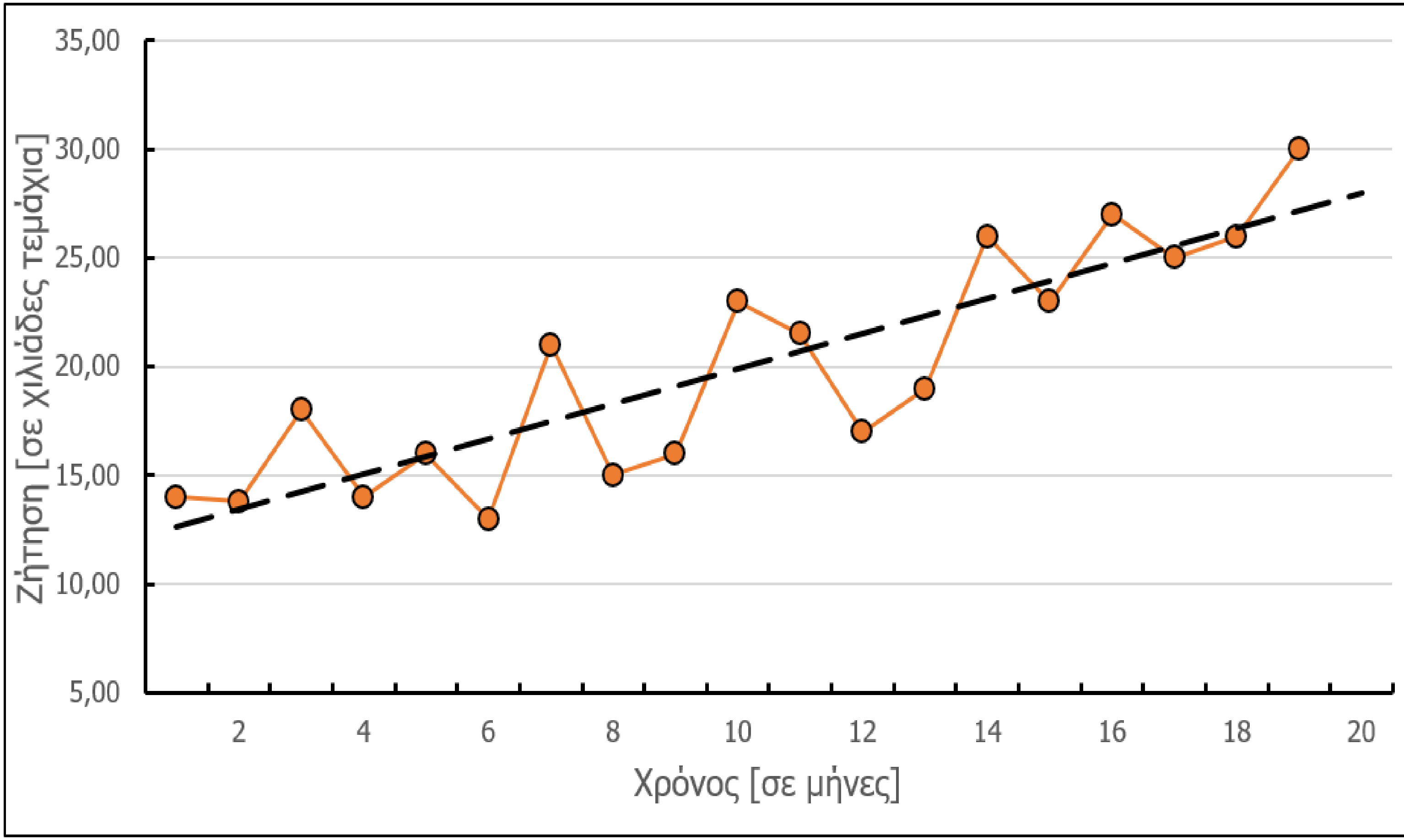
Η σημασία των προβλέψεων και μεθοδολογικές κατευθύνσεις 3/8

Με τις μεθόδους **ανάλυσης χρονοσειρών και προβολής της τάσης** προσπαθούμε να αναγνωρίσουμε με τη βοήθεια μαθηματικών προτύπων, τον τρόπο με τον οποίο διαμορφώθηκαν οι τιμές της υπό πρόβλεψη μεταβλητής στο πρόσφατο παρελθόν, ως συνάρτηση αποκλειστικά και μόνο του χρόνου, και να προβάλλουμε τον ίδιο ακριβώς αυτό τρόπο στο μέλλον.

Κυρίαρχη υπόθεση στις μεθόδους αυτές είναι ότι οι διάφοροι δομικοί παράγοντες, που διαμόρφωναν τις τιμές της υπό πρόβλεψη μεταβλητής, που μας ενδιαφέρει στο πρόσφατο παρελθόν, όποιοι και αν είναι αυτοί, θα συνεχίσουν με τον ίδιο τρόπο να διαμορφώνουν τις τιμές της και στο προσεχές μέλλον. **Εφαρμόζονται με επιτυχία** όταν υπάρχουν διαθέσιμα ιστορικά στοιχεία (όπως αυτά για παράδειγμα στο σχήμα που ακολουθεί) και ο χρονικός ορίζοντας της πρόβλεψης είναι μικρός.

Η σημασία των προβλέψεων και μεθοδολογικές κατευθύνσεις 4/8

Σχήμα 2.1: Προβολή κεντρικής τάσης για την πρόβλεψη της ζήτησης



Η σημασία των προβλέψεων και μεθοδολογικές κατευθύνσεις 5/8

Στα δεδομένα του σχήματος 2.1, ανεξάρτητα από τους πολλούς και άγνωστους δομικούς παράγοντες οι οποίοι διαμόρφωσαν τις τιμές της ζήτησης στο παρελθόν, παρατηρούμε ότι αυτές παρουσιάζουν μια σαφώς αυξητική τάση, η οποία θα μπορούσε να αποδοθεί κατά προσέγγιση για παράδειγμα από μια ευθεία κεντρική γραμμή, την κεντρική τάση.

Για να προβλέψουμε τη ζήτηση για την επόμενη χρονική περίοδο (την 20η στο σχήμα), απλώς προεκτείνουμε στο μέλλον την κατεύθυνση της κεντρικής αυτής τάσης (προβολή της τάσης).

Για την προβολή της κεντρικής τάσης χρησιμοποιούμε διάφορες μαθηματικές τεχνικές κι αυτό γιατί η μακρόχρονη κεντρική τάση δεν είναι πάντα ευθεία γραμμή (γραμμική τάση), όπως αυτή του σχήματος, αλλά μπορεί να έχει και διάφορες άλλες, πιο σύνθετες μορφές, όπως για παράδειγμα παραβολική, εκθετική, τύπου S, κ.λπ.

Η σημασία των προβλέψεων και μεθοδολογικές κατευθύνσεις 6/8

Με τις αιτιοκρατικές μεθόδους ή μεθόδους ανάλυσης των δομικών παραγόντων διαμορφώνουμε μαθηματικά πρότυπα, που αποδίδουν με κάποια σχετική ακρίβεια, με την έννοια της συμφωνίας με την πραγματικότητα, τη συμπεριφορά της μεταβλητής, που μας ενδιαφέρει και τις αιτίες που προκάλεσαν τις μεταβολές της, στο πρόσφατο παρελθόν.

Τα μαθηματικά αυτά πρότυπα είναι συνήθως υποδείγματα απλής ή πολλαπλής παλινδρόμησης, πολύπλοκα οικονομετρικά υποδείγματα, καμπύλες τύπου S ή απλά πρότυπα εξάρτησης της τιμής της υπό πρόβλεψη μεταβλητής, με πρόδρομα οικονομικά κυρίως ή άλλα φαινόμενα.

Περιγράφουν με διάφορες κατά περίπτωση μαθηματικές συναρτήσεις τις σχέσεις εξάρτησης ανάμεσα στην υπό πρόβλεψη μεταβλητή (εξαρτημένη μεταβλητή) και σε μία ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές, που διαμορφώνουν, η κάθε μία με τη δική της βαρύτητα, την τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής. Το κόστος κατασκευής των προτύπων αυτών είναι αρκετά υψηλό, αλλά τα αποτελέσματά τους, ιδιαίτερα για μεσοπρόθεσμες προβλέψεις ομάδων προϊόντων, είναι πράγματι εξαιρετικά.

Η σημασία των προβλέψεων και μεθοδολογικές κατευθύνσεις 7/8

Για παράδειγμα, σύμφωνα με την οικονομική θεωρία, η ζήτηση ενός προϊόντος σε μια συγκεκριμένη αγορά διαμορφώνεται μεταξύ άλλων από το μέγεθος του διαθέσιμου εισοδήματος, την τιμή πώλησης του προϊόντος, τις τιμές των υποκατάστατων ή άλλων παρόμοιων προϊόντων, το μέγεθος του πληθυσμού των καταναλωτών, τις δαπάνες διαφήμισης, κ.λπ. Θα μπορούσαμε λοιπόν <u>να εκτιμήσουμε το ύψος της ζήτησης (Z) ενός προϊόντος με βάση ένα μαθηματικό πρότυπο της μορφής</u> :

$$Z = a + b * \Delta E + c * \Delta\Delta$$

όπου το a είναι μια σταθερή παράμετρος ενώ τα b και c είναι οι παράμετροι, που περιγράφουν τη σχέση εξάρτησης ανάμεσα στη ζήτηση (Z) και τις μεταβολές του διαθέσιμου εισοδήματος (ΔΕ) και των δαπανών διαφήμισης (ΔΔ) αντίστοιχα. Η εκτίμηση των παραμέτρων του παραπάνω προτύπου γίνεται με τη βοήθεια στατιστικών στοιχείων και παρατηρήσεων μιας ορισμένης χρονικής περιόδου και με διάφορες μεθόδους.

Η σημασία των προβλέψεων και μεθοδολογικές κατευθύνσεις 8/8

Τέλος, με τις **ποιοτικές μεθόδους ή μεθόδους κρίσης** προσπαθούμε με μια συστηματική διαδικασία (όπως για παράδειγμα έρευνα αγοράς, συμβούλιο ειδικών στελεχών, κ.λπ.) να καταλήξουμε **σε κοινά αποδεκτές ποσοτικές εκτιμήσεις των μελλοντικών τιμών της υπό πρόβλεψη μεταβλητής**, που βασίζονται στις υποκειμενικές κρίσεις και την προσωπική γνώμη μιας ομάδας ανθρώπων, συνήθως ειδικών, σε συνδυασμό με ποιοτικά, κυρίως, αλλά και ποσοτικά στοιχεία και πληροφορίες.

Χρησιμοποιούνται όταν δεν έχουμε στη διάθεσή μας ή είναι πολύ δύσκολο να συγκεντρώσουμε επαρκή και αξιόπιστα στατιστικά στοιχεία σχετικά με τις τιμές της μεταβλητής, που μας ενδιαφέρει στο πρόσφατο παρελθόν, όπως για παράδειγμα όταν πρόκειται για την πρόβλεψη της ζήτησης ενός νέου προϊόντος, που σκοπεύουμε για πρώτη φορά να διαθέσουμε στην αγορά, για την πρόβλεψη εξελίξεων στην τεχνολογία, κ.λπ.

Άσκηση / Δραστηριότητα :

Οι μέθοδοι πρόβλεψης διακρίνονται σε τρεις γενικές κατηγορίες, τις οποίες μπορούμε να εφαρμόζουμε κατά περίπτωση. Πιο συγκεκριμένα, οι τρεις αυτές γενικές κατηγορίες είναι : (α) οι μέθοδοι ανάλυσης χρονοσειρών και προβολής της τάσης, (β) οι αιτιοκρατικές μέθοδοι ή μέθοδοι ανάλυσης των δομικών παραγόντων) και (γ) οι ποιοτικές μέθοδοι ή μέθοδοι κρίσης). Οι δύο πρώτες κατηγορίες, **οι μέθοδοι δηλαδή ανάλυσης χρονοσειρών και οι αιτιοκρατικές μέθοδοι αποτελούν ποσοτικές μεθόδους πρόβλεψης, ενώ η τρίτη κατηγορία ποιοτικές**. Οι μέθοδοι αυτές χρησιμοποιούνται με διαφορετικά κριτήρια, για διαφορετικούς σκοπούς και έχουν γενικά ένα διαφορετικό πεδίο εφαρμογής. Περιγράψτε με σαφήνεια τη διαφορά μεταξύ των ποσοτικών και των ποιοτικών μεθόδων πρόβλεψης. Ποιες συνθήκες θα επέβαλλαν τη χρήση μιας ποιοτικής μεθόδου έναντι μιας ποσοτικής. Δώστε από δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα εφαρμογής σε κάθε περίπτωση.

Ενδεικτική απάντηση :

(α) Με τις **ποσοτικές μεθόδους** πρόβλεψης διαμορφώνουμε μαθηματικά πρότυπα, που αποδίδουν με κάποια σχετική ακρίβεια τη διαχρονική συμπεριφορά της μεταβλητής, που μας ενδιαφέρει (μέθοδοι ανάλυσης χρονοσειρών και προβολής της τάσης) ή/και τις αιτίες, που προκάλεσαν τη συμπεριφορά αυτή (αιτιοκρατικές μέθοδοι ή μέθοδοι ανάλυσης των δομικών παραγόντων) στο πρόσφατο παρελθόν. Όλες οι ποσοτικές μέθοδοι στηρίζονται σε αριθμητικές τιμές (μετρήσεις ή παρατηρήσεις) της υπό πρόβλεψη μεταβλητής, που μας ενδιαφέρει ή/και πλήθους άλλων (ανεξάρτητων) μεταβλητών, που με κάποιο τρόπο διαμορφώνουν τη συμπεριφορά της υπό πρόβλεψη (εξαρτημένης) μεταβλητής, στη διάρκεια του παρελθόντος. Οι αριθμητικές αυτές τιμές μπορεί να είναι ο όγκος της ζήτησης που εκδηλώθηκε για ένα συγκεκριμένο προϊόν, το ύψος των πωλήσεων που πραγματοποιήθηκαν (σε μονάδες προϊόντος ή σε αξία πωληθέντων), το κόστος της παραγωγής, η τιμή πώλησης της μονάδας, το ύψος της διαφημιστικής δαπάνης και γενικά τιμές οποιασδήποτε μεταβλητής που θα είχε ενδιαφέρον να γνωρίζουμε την εξέλιξή της και μπορούμε να ποσοτικοποιήσουμε αυτήν την εξέλιξη με κάποιο τρόπο.

Ενδεικτική απάντηση :

Χαρακτηριστικά παραδείγματα εφαρμογής ποσοτικών μεθόδων είναι μεταξύ άλλων, η πρόβλεψη της αναμενόμενης ζήτησης για τον επόμενο μήνα, η μεταβολή στις πωλήσεις δεδομένου του ύψους της διαφημιστικής δαπάνης, που θα αποφασίσουμε για το επόμενο διάστημα, κ.λπ.

(β) Αντίθετα, με τις **ποιοτικές μεθόδους** πρόβλεψης προσπαθούμε με μια συστηματική διαδικασία (έρευνα αγοράς, συμβούλιο ειδικών στελεχών, κ.λπ.) να καταλήξουμε σε κοινά αποδεκτές ποσοτικές εκτιμήσεις των μελλοντικών τιμών της υπό πρόβλεψη μεταβλητής, που βασίζονται στις υποκειμενικές κρίσεις και την προσωπική γνώμη μιας ομάδας ανθρώπων, συνήθως ειδικών, σε συνδυασμό με ποιοτικά, κυρίως, αλλά και ποσοτικά στοιχεία και πληροφορίες. Χρησιμοποιούνται όταν δεν έχουμε στη διάθεσή μας ή είναι πολύ δύσκολο να συγκεντρώσουμε επαρκή και αξιόπιστα ποσοτικά στοιχεία σχετικά με τις τιμές της μεταβλητής που μας ενδιαφέρει στο πρόσφατο παρελθόν.

Μεθοδολογικά εργαλεία στις ποσοτικές μεθόδους πρόβλεψης

Πριν προχωρήσουμε **στην αναλυτική παρουσίαση των διαφόρων ποσοτικών μεθόδων πρόβλεψης**, είναι σκόπιμο να αποσαφηνίσουμε το μεθοδολογικό πλαίσιο, με τα στάδια που ακολουθούμε σε κάθε περίπτωση προβλήματος πρόβλεψης, πως διατυπώνεται το πρόβλημα, που μας απασχολεί, πως συγκεντρώνουμε και αναλύουμε τα απαραίτητα αριθμητικά δεδομένα και ποια είναι τα βασικά μεθοδολογικά εργαλεία, που έχουμε στη διάθεσή μας για τον έλεγχο εγκυρότητας και αξιοπιστίας των προβλέψεών μας, ανεξάρτητα από τα μαθηματικά υποδείγματα και τις μεθόδους, που κατά περίπτωση θα αποφασίσουμε τελικά να χρησιμοποιήσουμε.

Τα στάδια στη διαδικασία πρόβλεψης 1/6

Στάδιο 1. Ορισμός του προβλήματος:

Αν και ακούγεται περίεργο, ο ακριβής προσδιορισμός του προβλήματος είναι ένα από τα πιο σημαντικά και δύσκολα στάδια στη διαδικασία πρόβλεψης. Προϋποθέτει βαθιά κατανόηση του τρόπου με τον οποίο θα χρησιμοποιηθούν οι προβλέψεις, των αναγκών του ανθρώπου που τις χρειάζεται, αλλά και των υπολοίπων διαδικασιών με τις οποίες η διοίκηση του οργανισμού (επιχείρησης) υποστηρίζει ή όχι τη διαδικασία πρόβλεψης.

Τα στάδια στη διαδικασία πρόβλεψης 2/6

Στάδιο 2. Συγκέντρωση πληροφοριών:

Υπάρχουν πάντοτε τουλάχιστον **δύο μορφές διαθέσιμων πληροφοριών**:

(α) στατιστικά - αριθμητικά - δεδομένα και

(β) ποιοτικές πληροφορίες, προσωπικές απόψεις και κρίσεις εξειδικευμένων στελεχών.

Τα αριθμητικά δεδομένα είναι αυτά, που χρησιμοποιούμε για να διαμορφώσουμε ποσοτικά μαθηματικά πρότυπα πρόβλεψης. **Το σύνολο όμως των πληροφοριών πρέπει απαραίτητα να συγκεντρωθεί και να ταξινομηθεί σε εύχρηστη και κατανοητή μορφή.**

Τα στάδια στη διαδικασία πρόβλεψης 3/6

Στάδιο 3. Προκαταρκτική ανάλυση και διερεύνηση:

Στο στάδιο αυτό αναλύουμε τα πρώτα συμπεράσματα από τα ποσοτικά και ποιοτικά δεδομένα, που συγκεντρώθηκαν και διερευνούμε αν υπάρχουν ή όχι κάποιες χαρακτηριστικές τάσεις (αύξησης, μείωσης, περιοδικότητας, εποχικότητας, κλπ.) στις πραγματικές τιμές της υπό πρόβλεψη μεταβλητής. Προς την κατεύθυνση αυτή **είναι πολλαπλά χρήσιμη η γραφική παράσταση των δεδομένων (για μια πρώτη οπτική παρατήρηση) και η στατιστική επεξεργασία τους** (υπολογισμός χαρακτηριστικών τιμών θέσης και διασποράς, κ.λπ.).

Τα στάδια στη διαδικασία πρόβλεψης 4/6

Στάδιο 4. Επιλογή και Προσαρμογή του κατάλληλου μαθηματικού προτύπου:

Στο στάδιο αυτό αναζητούμε το πλέον κατάλληλο, από ένα πλήθος μαθηματικών προτύπων πρόβλεψης, που έχουμε στη διάθεσή μας, όπως για παράδειγμα πρότυπα κινητών μέσων, εκθετικής εξομάλυνσης, απλής ή πολλαπλής παλινδρόμησης, τα οποία θα δούμε αναλυτικά στη συνέχεια.

Τα στάδια στη διαδικασία πρόβλεψης 5/6

Στάδιο 5. Χρήση του προτύπου και αξιολόγηση των προβλέψεων:

Μετά την επιλογή του κατάλληλου μαθηματικού προτύπου πρόβλεψης και των επί μέρους αριθμητικών παραμέτρων του, αυτό είναι έτοιμο να χρησιμοποιηθεί συστηματικά στο μέλλον και να έχουμε έτσι στη διάθεσή μας προβλέψεις των μελλοντικών τιμών της μεταβλητής, που μας ενδιαφέρει.

Αυτό όμως δεν σημαίνει και το τέλος της διαδικασίας πρόβλεψης. Από τη στιγμή που θα έχουμε στη διάθεσή μας και τις πραγματικές τιμές της υπό πρόβλεψη μεταβλητής, είμαστε πλέον σε θέση να αξιολογήσουμε - εκ του αποτελέσματος - την ακρίβεια ή όχι των προβλέψεων και να προχωρήσουμε ανάλογα σε αναπροσαρμογή του προτύπου ή/και της διαδικασίας πρόβλεψης.

Τα στάδια στη διαδικασία πρόβλεψης 6/6

Στο σημείο αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό και πρέπει να σημειώσουμε και το εξής: η ακρίβεια στις προβλέψεις μας, οι μικρές δηλαδή ή μεγάλες διαφορές μεταξύ των προβλέψεων και των πραγματικών τιμών της υπό πρόβλεψη μεταβλητής δεν είναι το μοναδικό κριτήριο για να αξιολογήσουμε ως επιτυχή ή όχι τη διαδικασία πρόβλεψης.

Κι αυτό γιατί **τις προβλέψεις πρέπει να τις αντιμετωπίζουμε ως εν δυνάμει τιμές της υπό πρόβλεψη μεταβλητής, οι οποίες θα πραγματοποιηθούν υπό προϋποθέσεις.** Στη βάση αυτή, αισιόδοξες προβλέψεις αποτελούν ερέθισμα και κίνητρο για τη διοίκηση για να εντείνει τις προσπάθειές της προς την κατεύθυνση αυτή, ενώ απαισιόδοξες προβλέψεις σηματοδοτούν κίνδυνο, που πιθανότατα προδιαγράφεται αν η διοίκηση δεν πάρει τα κατάλληλα μέτρα για να αποφύγει την πραγματοποίησή του.

Συμβολισμοί και παραδοχές

Συνηθίζουμε να συμβολίζουμε με Y_t την πραγματική τιμή της μεταβλητής, που μας ενδιαφέρει, όπως αυτή παρατηρήθηκε στο τέλος της χρονικής περιόδου t. Τις προβλέψεις μας για κάθε περίοδο t, τις συμβολίζουμε με F_t. Για τις χρονικές περιόδους τις προγενέστερες της τρέχουσας περιόδου t, που είναι το τέλος της περιόδου, όπου κάνουμε τις προβλέψεις μας, έχουμε στη διάθεσή μας τις πραγματικές τιμές της μεταβλητής Y καθώς και τις προβλέψεις μας για τις ίδιες περιόδους. Η διαφορά $e_t = Y_t - F_t$ αποδίδει το σφάλμα της πρόβλεψής μας σε σχέση με την παρατηρηθείσα - εκ των υστέρων - τιμή της μεταβλητής και αποτελεί κριτήριο για την ακρίβεια και την αξιοπιστία της μεθόδου, που χρησιμοποιούμε για το μέλλον.

	Πραγματικές τιμές						Προβλέψεις			
Πραγματικές τιμές	Y_1	Y_2	Y_3	...	Y_{t-1}	Y_t				
Χρονική περίοδος t	1	2	3	...	t-1	t	t+1	t+2	...	t+m
Προβλέψεις	F_1	F_2	F_3	...	F_{t-1}	F_t	F_{t+1}	F_{t+2}	...	F_{t+m}
Σφάλμα στην πρόβλεψη	e_1	e_2	e_3	...	e_{t-1}	e_t				
	Χρονική στιγμή πρόβλεψης t									

Χρονοσειρές και διαστρωματικά στοιχεία 1/4

Γενικά, υπάρχουν δύο μορφές - ποσοτικών - πληροφοριών σε κάποιο πρόβλημα πρόβλεψης.

Η πρώτη μορφή ποσοτικών πληροφοριών είναι χρονοσειρές, δηλαδή διαδοχικές - χρονικά - παρατηρήσεις της τιμής μιας μεταβλητής, που μας ενδιαφέρει, για ένα μεγάλο σχετικά αριθμό χρονικών περιόδων.

Παράδειγμα χρονοσειράς είναι τα στοιχεία του πίνακα 2.2 της επόμενης σελίδας, όπου σημειώνεται η μηνιαία συνολική επιβατική κίνηση (εσωτερικού και εξωτερικού) στο αεροδρόμιο 'Ελευθέριος Βενιζέλος' της Αθήνας για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο (από τον Ιανουάριο του 2015 μέχρι και τον Απρίλιο του 2019).

Χρονοσειρές και διαστρωματικά στοιχεία 2/4

Πίνακας 2.2: Συνολική μηνιαία επιβατική κίνηση στο διεθνές αεροδρόμιο «Ελευθέριος Βενιζέλος» Αθηνών

Έτος / Μήνας	2015	2016	2017	2018	2019
Ιανουάριος	976.388	1.092.844	1.206.809	1.284.404	1.392.885
Φεβρουάριος	905.505	1.070.294	1.125.334	1.192.905	1.327.788
Μάρτιος	1.099.428	1.288.173	1.380.509	1.518.155	1.652.594
Απρίλιος	1.455.926	1.474.752	1.643.487	1.863.047	1.984.114
Μάιος	1.653.428	1.800.482	1.874.078	2.161.379	—
Ιούνιος	1.882.093	1.957.066	2.176.121	2.429.560	—
Ιούλιος	2.139.127	2.375.645	2.562.545	2.853.201	—
Αύγουστος	2.150.265	2.366.601	2.547.848	2.889.163	—
Σεπτέμβριος	1.858.739	2.132.546	2.300.230	2.557.759	—
Οκτώβριος	1.578.118	1.773.871	2.047.708	2.207.142	—
Νοέμβριος	1.205.089	1.332.726	1.446.137	1.623.582	—
Δεκέμβριος	1.183.271	1.351.998	1.425.660	1.555.134	—

Πηγή: Διεθνής Αερολιμένας Αθηνών, Μάιος 2019.

Χρονοσειρές και διαστρωματικά στοιχεία 3/4

Η δεύτερη μορφή ποσοτικών πληροφοριών είναι **διαστρωματικά στοιχεία**, τιμές δηλαδή της μεταβλητής, που μας ενδιαφέρει σε δεδομένη χρονική στιγμή ή ανά περίοδο από διάφορες όμως ομάδες ή στρώματα.

Παράδειγμα στοιχείων τέτοιας μορφής είναι αυτά του πίνακα 2.3 της επόμενης σελίδας, όπου σημειώνεται η χώρα παραγωγής (Γερμανία, Γαλλία ή Ιαπωνία), ο κυβισμός (σε κ. εκ.), η ισχύς (σε PS), η τιμή πώλησης (σε €) και η κατανάλωση (σε lt ανά 100 Km) 38 διαφορετικών τύπων αυτοκινήτων, όπως αυτά δημοσιεύθηκαν τον Ιούλιο του 2005 για την Ελληνική αγορά. Σημειώστε ότι όλες αυτές οι παρατηρήσεις προέρχονται από την ίδια χρονική περίοδο (δηλαδή τον Ιούλιο 2005) από διαφορετικές όμως ομάδες (τύπους αυτοκινήτων).

Χρονοσειρές και διαστρωματικά στοιχεία 4/4

Πίνακας 2.3: Χώρα παραγωγής, κυβισμός, ισχύς, τιμή πώλησης και κατανάλωση 38 αυτοκινήτων της ελληνικής αγοράς

α/α	Τύπος αυτοκινήτου	Χώρα προέλευσης	Κυβισμός σε κ.εκ.	Ισχύς σε PS	Τιμή πώλησης σε €	Κατανάλωση σε lt/100 Km
1	AUDI A4 1.6	GER	1.596	102	24.880	7,70
2	AUDI A4 1.8 T	GER	1.781	163	33.030	8,20
3	AUDI A4 2.0	GER	1.984	130	30.700	8,00
4	AUDI A4 2.0 TFSI	GER	1.984	200	40.770	7,70
5	AUDI A4 2.0 DTM	GER	1.984	220	48.000	8,10
6	BMW 316 Ci/2 COMFORT	GER	1.596	115	31.350	7,90
7	BMW 320i COMFORT	GER	1.995	150	34.100	7,40
...	...	...	...	...	...	...
20	NISSAN PRIMERA 1.8 ACENTA	JAP	1.769	116	22.530	7,40
21	NISSAN PRIMERA 2.0 TECHNA	JAP	1.998	140	28.030	8,50
22	SUBARU IMPREZA 1.6	JAP	1.597	95	20.100	8,20
23	SUBARU IMPREZA 1.6 TURBO	JAP	1.597	150	23.580	8,50
...	...	...	...	...	...	...
37	RENAULT LAGUNA FL 2.0 TURBO	FRA	1.998	170	27.600	8,40
38	RENAULT LAGUNA FL 2.0 TURBO GT	FRA	1.998	205	34.000	8,50

Πηγή: Auto Moto und Sport, Ιούλιος 2005.

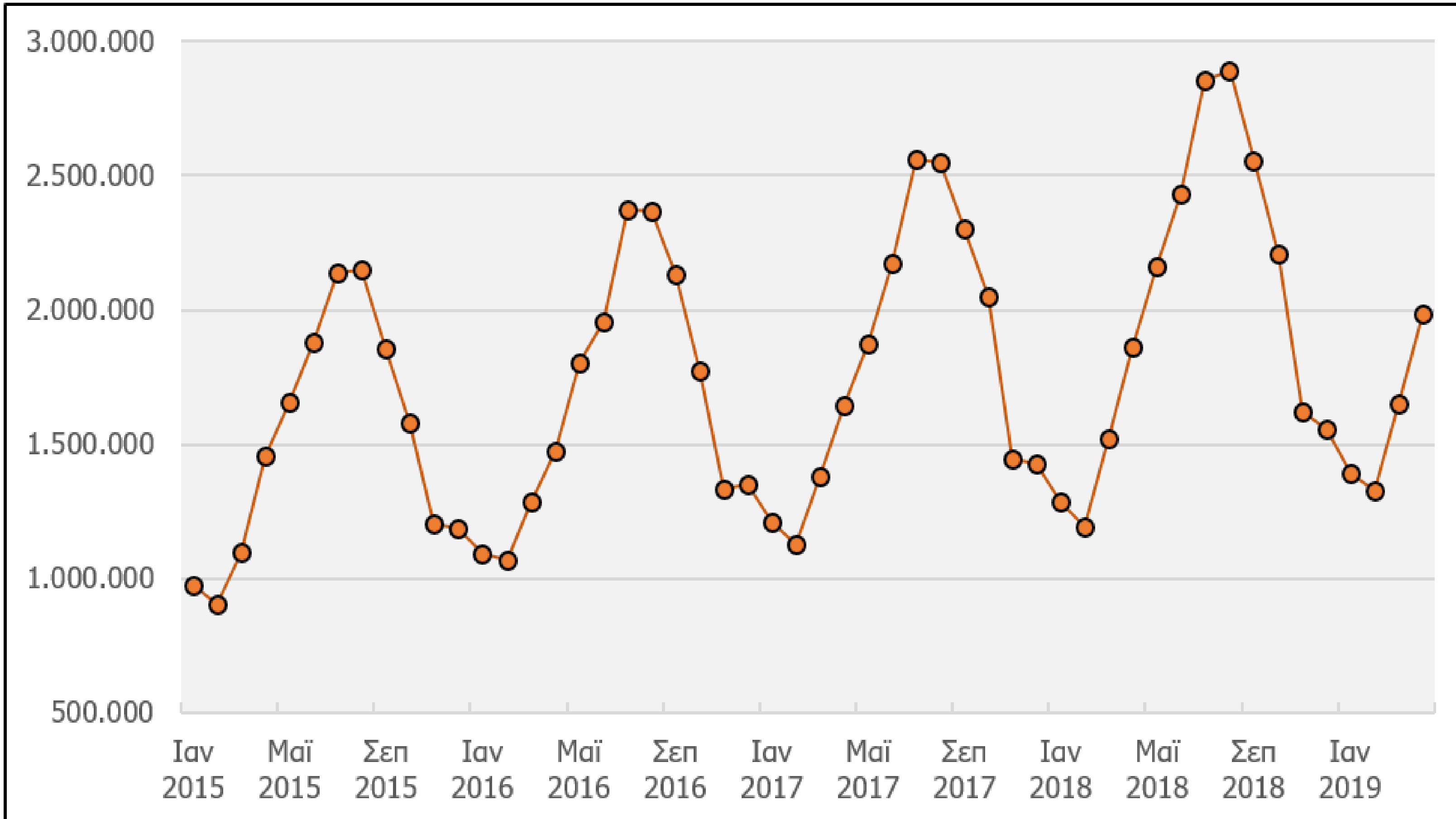
Γραφική παρουσίαση και διερεύνηση των στοιχείων 1/12

Ο πιο απλός τρόπος για μια πρώτη ανάλυση των στοιχείων, που έχουμε στη διάθεσή μας **είναι να τα 'οπτικοποιήσουμε', να τα παρουσιάσουμε δηλαδή με τη βοήθεια κάποιας γραφικής παράστασης**. Η μορφή των διαθέσιμων στοιχείων καθορίζει και την πλέον κατάλληλη μορφή γραφικής παρουσίασής τους.

Για παράδειγμα, **στο σχήμα 2.2 της επόμενης σελίδας σημειώνουμε τη διαχρονική γραφική παράσταση των στοιχείων του πίνακα 2.2**, της μηνιαίας δηλαδή συνολικής επιβατικής κίνησης (εσωτερικού και εξωτερικού) στο αεροδρόμιο 'Ελευθέριος Βενιζέλος' της Αθήνας για τη χρονική περίοδο (από τον Ιανουάριο του 2015 μέχρι και τον Απρίλιο του 2019). Είναι η πιο 'κλασσική' μορφή γραφικής παρουσίασης στοιχείων χρονοσειράς και μας βοηθά να αναγνωρίσουμε, αν υπάρχουν, χαρακτηριστικές 'μορφές συμπεριφοράς', που καθοδηγούν και ερμηνεύουν τη διαχρονική μεταβολή και εξέλιξη των τιμών της.

Γραφική παρουσίαση και διερεύνηση των στοιχείων 2/12

Σχήμα 2.2 : Διαχρονική παράσταση των στοιχείων (επιβατική κίνηση) του Πίνακα 2.2.



Γραφική παρουσίαση και διερεύνηση των στοιχείων 3/12

Γενικά υπάρχουν **τέσσερις διαφορετικές πιθανές μορφές συμπεριφοράς**, που συνηθίζουμε να τις ονομάζουμε '**συνιστώσες**': (α) η **Οριζόντια συνιστώσα**, (β) η **συνιστώσα Τάσης** (για αύξηση ή μείωση των τιμών), (γ) η **συνιστώσα Εποχικότητας** και (δ) η **Κυκλική συνιστώσα**. Πιο συγκεκριμένα:

- **Οριζόντια συνιστώσα** θα συναντήσουμε στις περιπτώσεις που οι τιμές της χρονοσειράς κινούνται διαχρονικά γύρω από κάποια σταθερή - μέση - τιμή. Ένα προϊόν που η ζήτησή του δεν αυξάνει ούτε μειώνεται διαχρονικά είναι ένα παράδειγμα χρονοσειράς με οριζόντια συνιστώσα και σταθερή (αμετάβλητη με το χρόνο) διαχρονική συμπεριφορά.

- **Συνιστώσα Τάσης** θα συναντήσουμε σε περιπτώσεις μακρόχρονης και συστηματικής διαχρονικής αύξησης ή μείωσης των τιμών της χρονοσειράς κατά σταθερό ποσό ή ποσοστό (γραμμική ή πολλαπλασιαστική μορφή της τάσης).

Γραφική παρουσίαση και διερεύνηση των στοιχείων 4/12

- **Εποχική συνιστώσα** στη διαχρονική συμπεριφορά μιας χρονοσειράς εμφανίζεται όταν οι τιμές της επηρεάζονται έντονα από εποχικούς παράγοντες (την εποχή του έτους, την ημέρα της εβδομάδας κλπ.). Από τη διαχρονική παράσταση στο προηγούμενο σχήμα μπορεί εύκολα να αναγνωρίσει κανείς εποχική συνιστώσα στη διαχρονική μεταβολή των στοιχείων της μηνιαίας συνολικής επιβατικής κίνησης (εσωτερικού και εξωτερικού) στο αεροδρόμιο 'Ελευθέριος Βενιζέλος' της Αθήνας, με σημαντική αύξηση της συνολικής επιβατικής κίνησης στη διάρκεια των καλοκαιρινών μηνών κάθε έτους (δες και στο σχήμα της επόμενης σελίδας).
- **Κυκλική συνιστώσα** τέλος θα συναντήσουμε στις περιπτώσεις που οι περιοδικές μεταβολές (μέγιστα και ελάχιστα) εμφανίζονται μεν συστηματικά, όχι όμως με σταθερό χρονικό βήμα, όπως συμβαίνει στην περίπτωση εποχικής συνιστώσας.

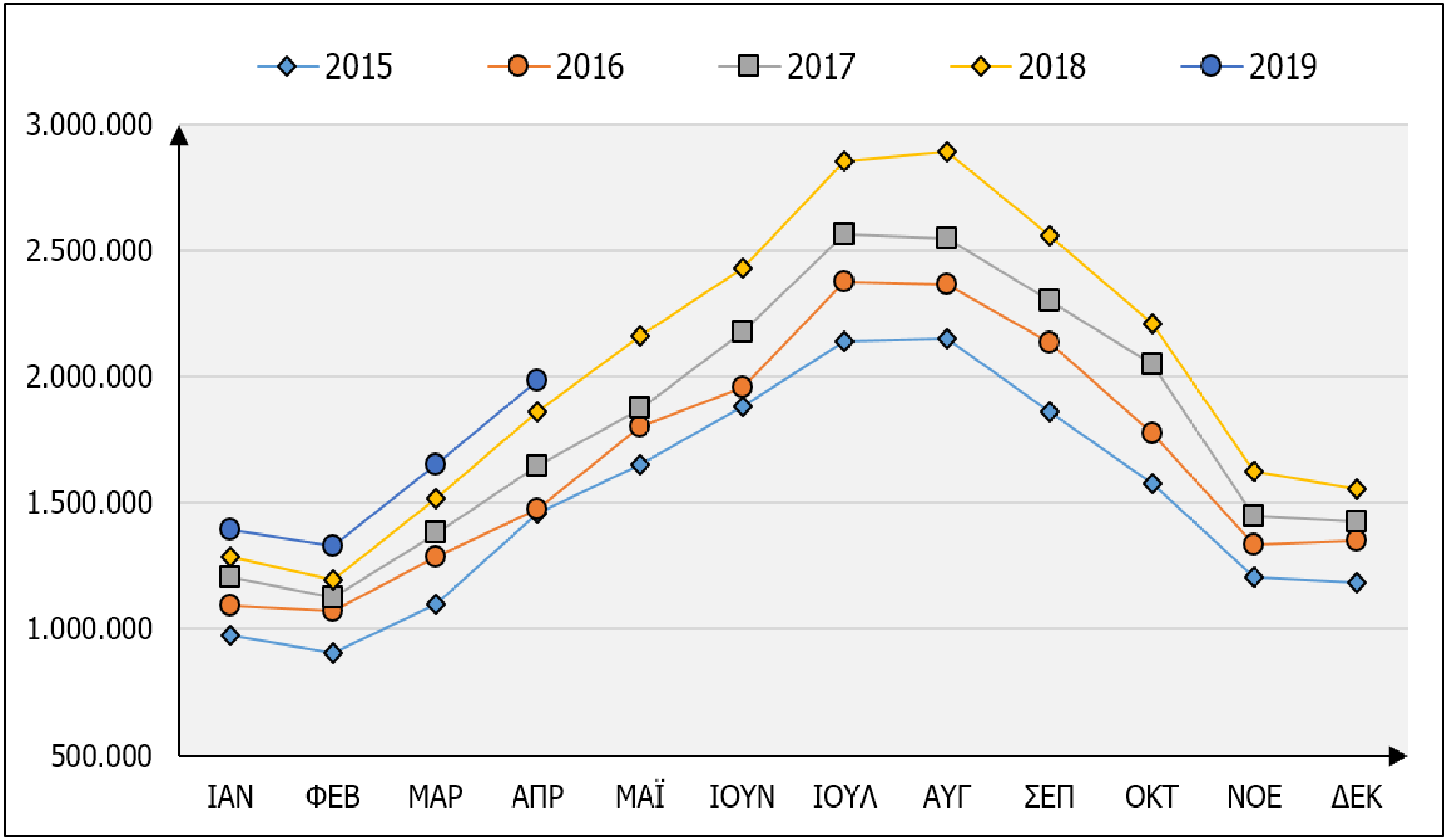
Γραφική παρουσίαση και διερεύνηση των στοιχείων 5/12

Είναι πολλές οι περιπτώσεις χρονοσειρών, που εμφανίζουν συνδυασμό των παραπάνω συνιστωσών στη διαχρονική συμπεριφορά τους. Η αναγνώριση των πολλών και ποικίλων μορφών, που μπορεί να 'κρύβεται' στην εξέλιξη των τιμών κάποιας χρονοσειράς είναι ακριβώς ένα από τα στοιχεία που καθιστά το πρόβλημα της πρόβλεψης εξαιρετικά πολύπλοκο αλλά και ενδιαφέρον.

Στο σχήμα 2.3 της επόμενης σελίδας σημειώνουμε την **εποχική διαχρονική γραφική παράσταση** των στοιχείων της μηνιαίας συνολικής επιβατικής κίνησης (εσωτερικού και εξωτερικού) στο αεροδρόμιο 'Ελευθέριος Βενιζέλος' της Αθήνας.

Γραφική παρουσίαση και διερεύνηση των στοιχείων 6/12

Σχήμα 2.3 : Εποχική διαχρονική παράσταση των στοιχείων του Πίνακα 2.2.



Γραφική παρουσίαση και διερεύνηση των στοιχείων 7/12

Η μορφή αυτή γραφικής παράστασης είναι εξαιρετικά χρήσιμη στις περιπτώσεις χρονοσειρών με εποχική συνιστώσα. **Στις εποχικές διαχρονικές παραστάσεις χρονοσειρών τα στοιχεία σημειώνονται σε συνάρτηση με την 'εποχή'.** Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να μελετήσουμε πιο προσεκτικά και να κατανοήσουμε τη συμπεριφορά εποχικών δεδομένων.

Για παράδειγμα, στην περίπτωση του σχήματος 2.3 της προηγούμενης σελίδας, **οι εποχές είναι οι μήνες του έτους** και εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε τη **σημαντική αύξηση της συνολικής επιβατικής κίνησης στη διάρκεια των καλοκαιρινών μηνών** κάθε έτους. Από την ίδια γραφική παράσταση διαπιστώνουμε επίσης ότι στη διάρκεια του έτους 2018 η συνολική επιβατική κίνηση **υπήρξε για κάθε μήνα σημαντικά μεγαλύτερη από τις προηγούμενες χρονιές.**

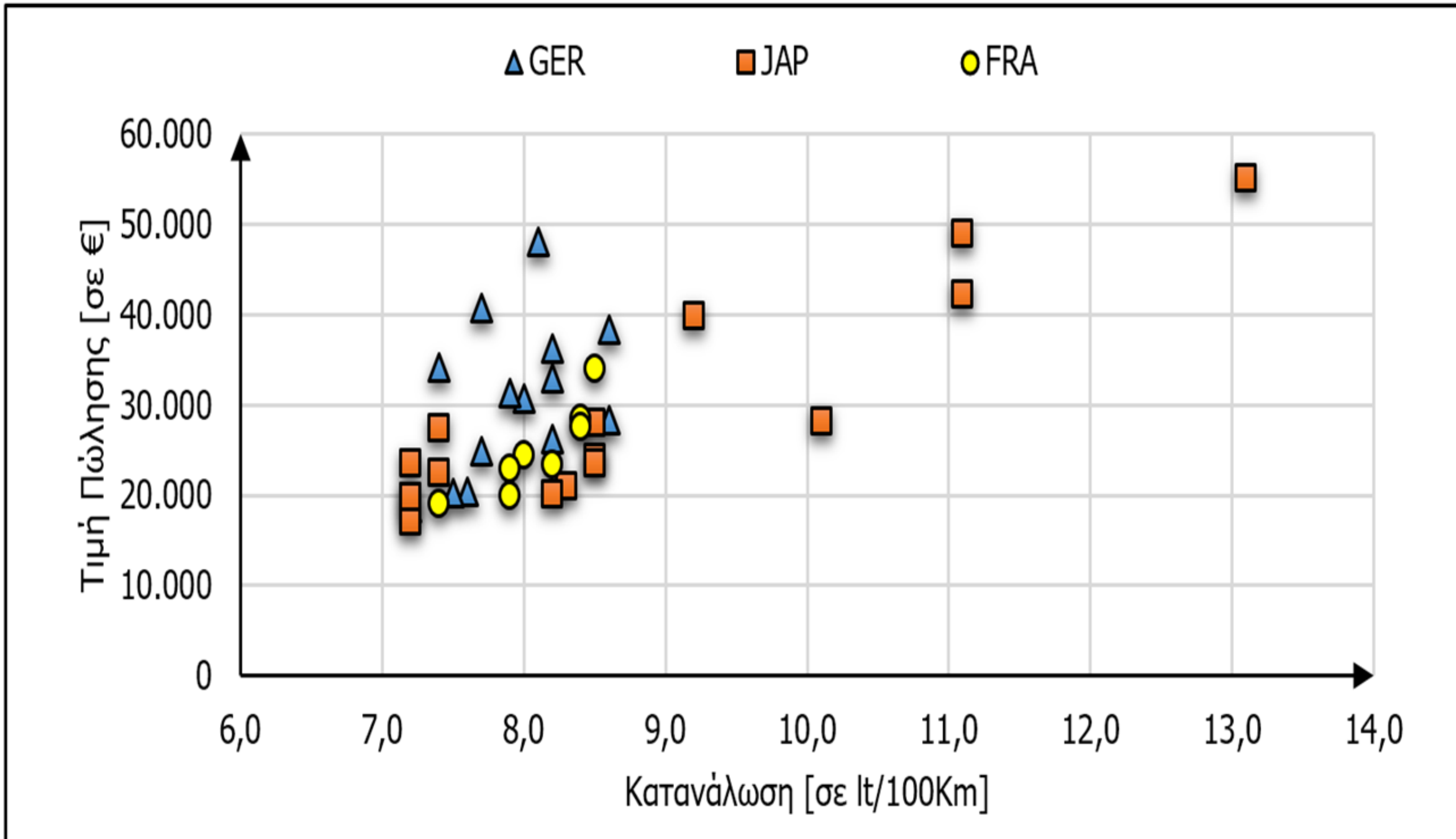
Γραφική παρουσίαση και διερεύνηση των στοιχείων 8/12

Οι παραπάνω μορφές γραφικής παράστασης δεδομένων **δεν είναι κατάλληλες για διαστρωματικά δεδομένα.** Στις περιπτώσεις αυτές καταφεύγουμε στη χρήση **διαγραμμάτων διασποράς**, όπως αυτά των σχημάτων 2.4 και 2.5 στις σελίδες που ακολουθούν.

Πιο συγκεκριμένα, στο σχήμα 2.4. σημειώνουμε την τιμή πώλησης, τη μεταβλητή δηλαδή που θα μας ενδιέφερε να ερμηνεύσουμε τη συμπεριφορά της, σε σχέση με την κατανάλωση, ενώ στο σχήμα 2.5 σημειώνουμε την τιμή πώλησης σε σχέση με την ισχύ. Και στα δύο διαγράμματα σημειώνουμε επιπλέον για κάθε σημείο και τη χώρα προέλευσης του αυτοκινήτου.

Γραφική παρουσίαση και διερεύνηση των στοιχείων 9/12

Σχήμα 2.4 : Διασπορά τιμής πώλησης με κατανάλωση, ανά χώρα προέλευσης.

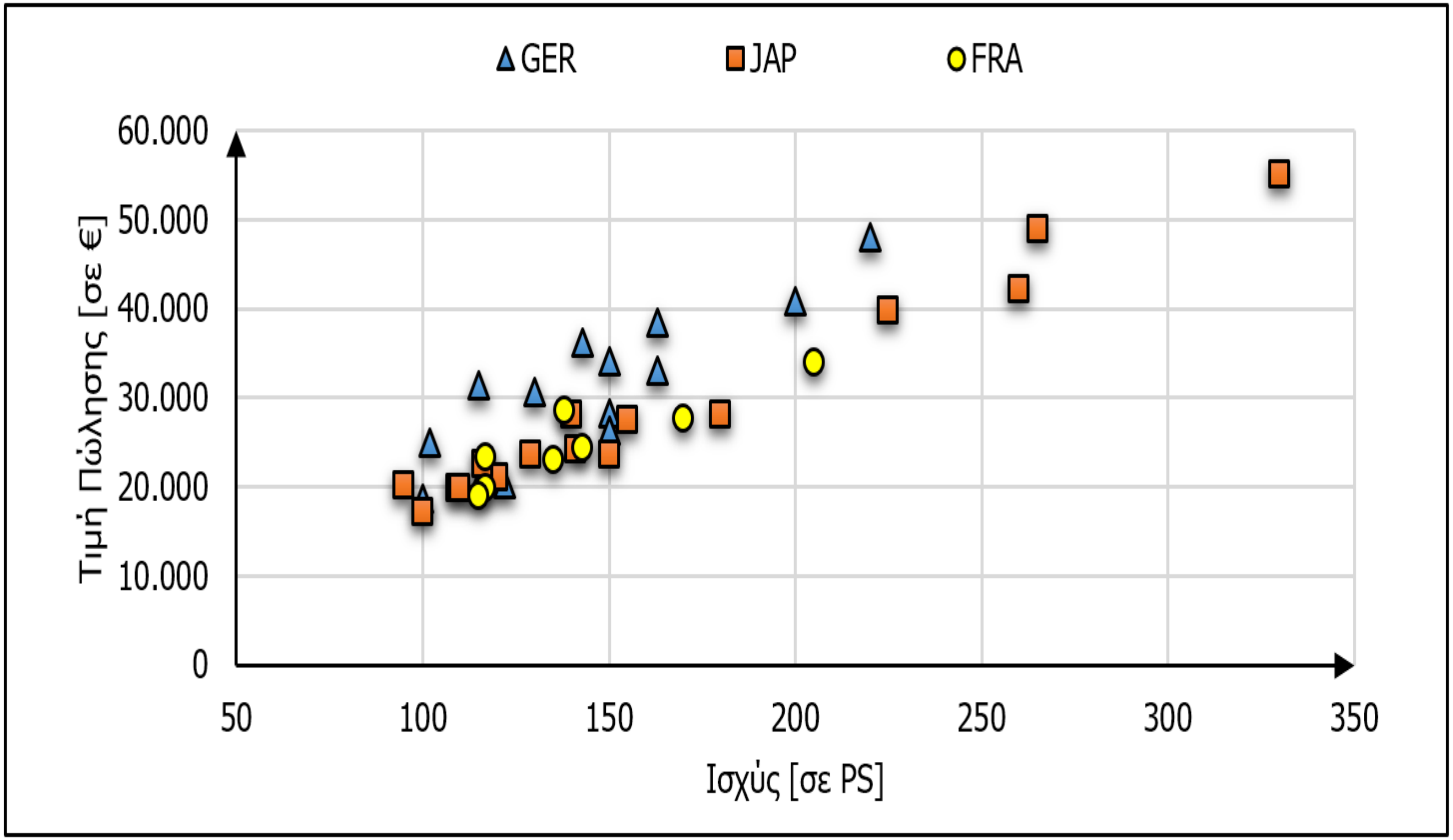


Γραφική παρουσίαση και διερεύνηση των στοιχείων 10/12

Το διάγραμμα διασποράς του σχήματος 2.4 **μας αποκαλύπτει μια μορφή συσχέτισης της τιμής με την κατανάλωση.** Πιο συγκεκριμένα αυτοκίνητα με μικρή κατανάλωση είναι γενικά φθηνότερα. Επιπλέον φαίνεται ότι τα πέντε αυτοκίνητα με τη μεγαλύτερη κατανάλωση είναι ιαπωνικής προέλευσης ενώ τα γερμανικής προέλευσης αυτοκίνητα είναι γενικά πιο ακριβά από αυτά ιαπωνικής και γαλλικής προέλευσης για την ίδια περίπου κατανάλωση.

Γραφική παρουσίαση και διερεύνηση των στοιχείων 11/12

Σχήμα 2.5 : Διασπορά τιμής πώλησης με ισχύ, ανά χώρα προέλευσης.



Γραφική παρουσίαση και διερεύνηση των στοιχείων 12/12

Στο διάγραμμα διασποράς του σχήματος 2.5 **αποτυπώνεται επίσης μια ισχυρή μορφή συσχέτισης της τιμής πώλησης με την ισχύ**. Αυτοκίνητα μικρής ισχύος είναι γενικά φθηνότερα. Από το ίδιο διάγραμμα προκύπτει επίσης ότι τα γερμανικής προέλευσης αυτοκίνητα είναι γενικά πιο ακριβά από αυτά ιαπωνικής και γαλλικής προέλευσης για την ίδια περίπου ισχύ.

Από τα παραπάνω, **θα μπορούσε λοιπόν κανείς να διαμορφώσει ένα μαθηματικό πρότυπο πρόβλεψης της τιμής πώλησης ενός αυτοκινήτου, με εξαρτημένες μεταβλητές την ισχύ, την κατανάλωση αλλά και τη χώρα προέλευσης ή τον κυβισμό**.

Τα διαγράμματα διασποράς λοιπόν, μας βοηθούν να αναγνωρίσουμε σχέσεις μεταξύ της μεταβλητής που μας ενδιαφέρει (εξαρτημένη μεταβλητή) και κάποιων άλλων (ανεξάρτητες μεταβλητές), που ερμηνεύουν τη συμπεριφορά της εξαρτημένης μεταβλητής.

Εγκυρότητα και αξιοπιστία στις μεθόδους πρόβλεψης 1/4

Η εγκυρότητα και αξιοπιστία μιας μεθόδου πρόβλεψης εξαρτάται από το βαθμό που αυτή προσαρμόζεται στα διαθέσιμα δεδομένα και από την ακρίβεια την οποία επιτυγχάνει στην πρόβλεψη των πραγματικών τιμών της μεταβλητής, που μας ενδιαφέρει. Αν λοιπόν συμβολίσουμε με et το σφάλμα στην πρόβλεψη, η ακρίβεια της μεθόδου περιγράφεται από τα αριθμητικά μέτρα που σημειώνουμε παρακάτω.

Σφάλμα στην πρόβλεψη	$e_t = Y_t - F_t$	(2.8)
Μέσο σφάλμα	$ME = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} e_t$	(2.9)
Μέσο απόλυτο σφάλμα	$MAE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \lvert e_t \rvert$	(2.10)
Μέσο τετράγωνο σφάλματος	$MSE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} e_t^2$	(2.11)

Εγκυρότητα και αξιοπιστία στις μεθόδους πρόβλεψης 2/4

Συνηθίζουμε να χρησιμοποιούμε εναλλακτικά και κάποια άλλα που μετρούν την ακρίβεια σχετικά (σε ποσοστά). Πρέπει να σημειώσουμε ότι αυτά τα ποσοστιαία αριθμητικά μέτρα ακρίβειας δεν έχουν νόημα στην περίπτωση που στα αριθμητικά δεδομένα υπάρχουν μηδενικές (ή πολύ μικρές) τιμές.

Ποσοστιαίο σφάλμα	$PE_t = \dfrac{Y_t - F_t}{Y_t} * 100$	(2.12)
Μέσο ποσοστιαίο σφάλμα	$MPE = \dfrac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} PE_t$	(2.13)
Μέσο απόλυτο ποσοστιαίο σφάλμα	$MAPE = \dfrac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \lvert PE_t \rvert$	(2.14)

Μετασχηματισμός και διόρθωση των δεδομένων 1/2

Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις που είναι απαραίτητο να προηγηθεί μετασχηματισμός ή/και διόρθωση των τιμών των διαθέσιμων δεδομένων. Οι περιπτώσεις αυτές γενικά είναι οι εξής:

- **Μαθηματικός μετασχηματισμός, για την εξομάλυνση έντονων διαφορών**. Συνήθως χρησιμοποιούνται λογάριθμοι των τιμών ή τετραγωνικές ρίζες τους. Με τον τρόπο αυτό απαλύνουμε τις έντονες διακυμάνσεις των τιμών και καταλήγουμε σε απλούστερες σχέσεις και απλούστερα μαθηματικά υποδείγματα πρόβλεψης.

- **Διόρθωση λόγω ημερολογιακών διαφορών**. Παράδειγμα η διαχρονική μεταβολή της μηνιαίας παραγωγής κάποιου προϊόντος. Οι διαφορές στις εργάσιμες ημέρες από μήνα σε μήνα μπορεί να είναι ιδιαίτερα σημαντική.

Μετασχηματισμός και διόρθωση των δεδομένων 2/2

- Διόρθωση για την επίδραση του πληθωρισμού. Είναι διαφορετική για παράδειγμα η χρονική αξία 1.000 δρχ. του 1980 με αυτή του ισοδύναμου ποσού σε €, σήμερα. Γι' αυτό συνήθως εκφράζουμε οικονομικά δεδομένα σε σταθερές τιμές, σε σχέση με κάποιο συγκεκριμένο έτος βάσης.

- Διόρθωση λόγω πληθυσμιακών αλλαγών. Όταν για παράδειγμα προσπαθούμε να προβλέψουμε την επιβατική κίνηση με κάποιο μέσο μεταφοράς σε συγκεκριμένη πόλη, πρέπει να ληφθεί υπόψη η προσδοκητή αύξηση ή μείωση του πληθυσμού της, με βάση δημογραφικά δεδομένα. Στις περιπτώσεις αυτές συνηθίζουμε να εκφράζουμε την επιβατική κίνηση ως ποσοστό του πληθυσμού.

Άσκηση / Δραστηριότητα :

2.1 Οι προβλέψεις των πωλήσεων (σε χιλιάδες τεμάχια) ενός προϊόντος για ορισμένο διάστημα 8 εβδομάδων, με δύο διαφορετικές μεθόδους πρόβλεψης, όπως και οι πραγματικές τιμές των πωλήσεων για το ίδιο διάστημα, σημειώνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

Εβδομάδα	1	2	3	4	5	6	7	8
Προβλέψεις των πωλήσεων με δύο διαφορετικές μεθόδους πρόβλεψης:								
1η μέθοδος	86,0	84,0	76,0	84,0	82,0	90,0	88,0	94,0
2η μέθοδος	80,0	79,0	80,0	84,0	85,0	86,0	93,0	85,0
Πραγματικές τιμές των πωλήσεων:								
Πωλήσεις	84,0	80,0	82,0	90,0	86,0	88,0	92,0	86,0

Να υπολογιστούν και για τις δύο μεθόδους πρόβλεψης το μέσο τετράγωνο σφάλματος και το μέσο απόλυτο ποσοστιαίο σφάλμα. Ποια από τις δύο μεθόδους ήταν ακριβέστερη στις προβλέψεις με βάση τα δύο παραπάνω κριτήρια;

Ενδεικτική απάντηση :

Στον πίνακα που ακολουθεί, υπολογίζουμε το μέσο σφάλμα, το μέσο τετράγωνο σφάλματος, το μέσο απόλυτο σφάλμα και το μέσο απόλυτο ποσοστιαίο σφάλμα, για τα αριθμητικά αποτελέσματα της 1ης και 2ης μεθόδου πρόβλεψης αντίστοιχα.

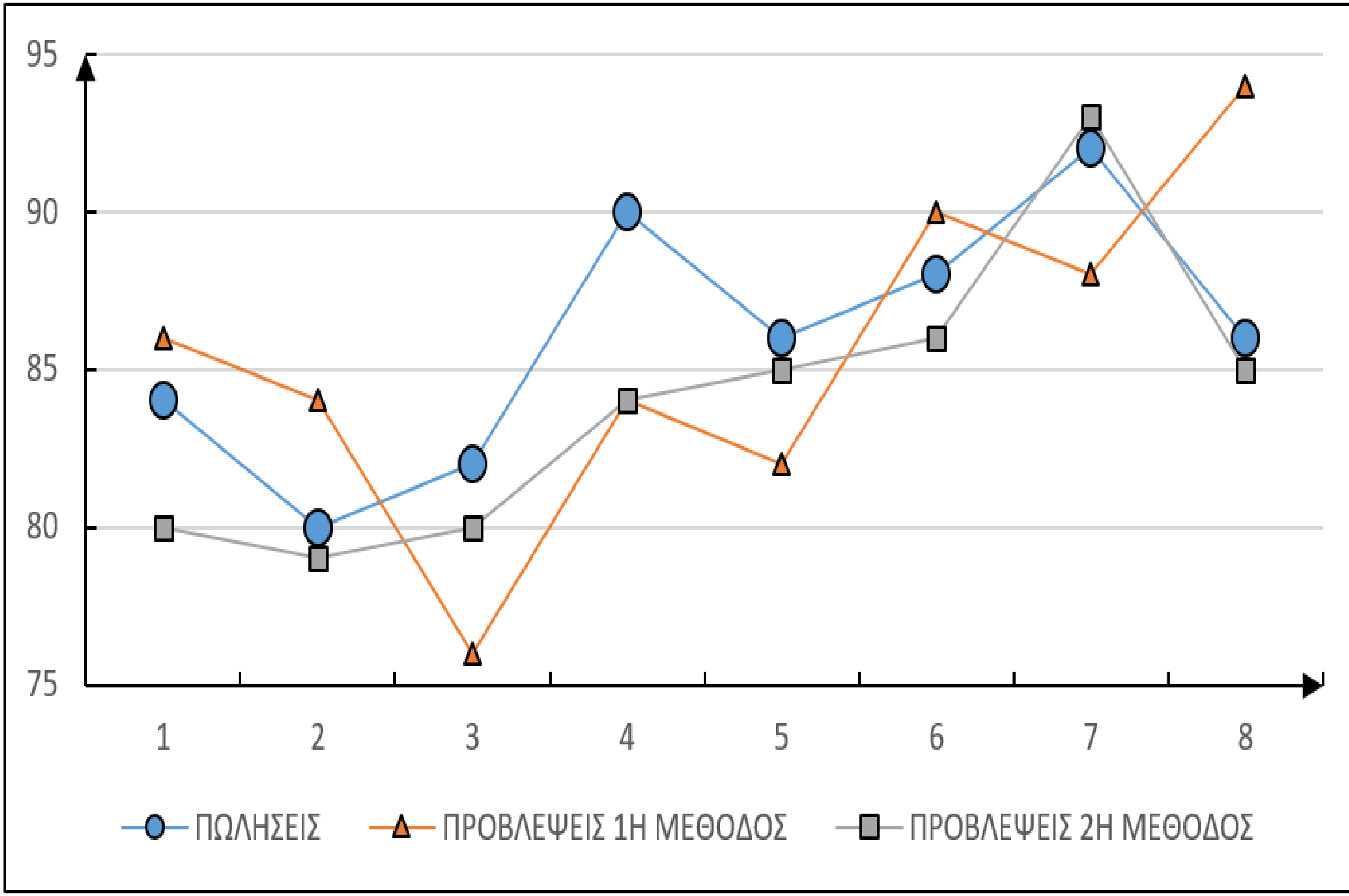
		1η ΜΕΘΟΔΟΣ					2η ΜΕΘΟΔΟΣ				
t	Yt	Ft	et	et^2	|et|	|et|/Yt	Ft	et	et^2	|et|	|et|/Yt
1	84	86	-2,00	4,00	2,00	2,38%	80	4,00	16,00	4,00	4,76%
2	80	84	-4,00	16,00	4,00	5,00%	79	1,00	1,00	1,00	1,25%
3	82	76	6,00	36,00	6,00	7,32%	80	2,00	4,00	2,00	2,44%
4	90	84	6,00	36,00	6,00	6,67%	84	6,00	36,00	6,00	6,67%
5	86	82	4,00	16,00	4,00	4,65%	85	1,00	1,00	1,00	1,16%
6	88	90	-2,00	4,00	2,00	2,27%	86	2,00	4,00	2,00	2,27%
7	92	88	4,00	16,00	4,00	4,35%	93	-1,00	1,00	1,00	1,09%
8	86	94	-8,00	64,00	8,00	9,30%	85	1,00	1,00	1,00	1,16%
		average :	0,50	24,00	4,50	5,24%	average :	2,00	8,00	2,25	2,60%

Ενδεικτική απάντηση :

Από τις τιμές των μεγεθών του πίνακα, διαπιστώνουμε ότι **η 2η μέθοδος πρόβλεψης είναι ακριβέστερη**, επειδή οι τιμές μέσου τετραγώνου σφάλματος (8,00), του μέσου απόλυτου σφάλματος (2,25) και του μέσου απόλυτου ποσοστιαίου σφάλματος (2,60%), των δεικτών δηλαδή που αποτελούν μέτρα εγκυρότητας και αξιοπιστίας των προβλέψεων, είναι μικρότερες.

Στο σχήμα, που ακολουθεί, σημειώνουμε μια γραφική παράσταση των ίδιων αυτών στοιχείων, των πραγματικών δηλαδή αριθμητικών τιμών της υπό πρόβλεψη μεταβλητής (πωλήσεις σε χιλιάδες τεμάχια) και των αριθμητικών τιμών των προβλέψεων με τις δύο διαφορετικές μεθόδους πρόβλεψης. Στο σχήμα αποτυπώνεται γραφικά και διαπιστώνεται 'διαισθητικά' το ίδιο συμπέρασμα, ότι δηλαδή η 2η μέθοδος πρόβλεψης είναι ακριβέστερη, επειδή οι τιμές της βρίσκονται πιο 'κοντά' στις πραγματικές τιμές της υπό πρόβλεψη μεταβλητής.

Ενδεικτική απάντηση :



Μέθοδοι ανάλυσης χρονοσειρών και προβολής της τάσης

Με τις μεθόδους ανάλυσης χρονοσειρών και προβολής της τάσης προσπαθούμε να αναγνωρίσουμε τον τρόπο με τον οποίο διαμορφώθηκαν οι τιμές μιας μεταβλητής στο πρόσφατο παρελθόν, ως συνάρτηση αποκλειστικά και μόνο του χρόνου, και να προβάλλουμε τον ίδιο ακριβώς αυτό τρόπο και στο μέλλον. **Κυρίαρχη δηλαδή υπόθεση στις μεθόδους αυτές είναι ότι οι διάφοροι δομικοί παράγοντες που διαμόρφωναν τις τιμές της μεταβλητής, που μας ενδιαφέρει στο πρόσφατο παρελθόν, όποιοι και αν είναι αυτοί, θα συνεχίσουν με τον ίδιο τρόπο να διαμορφώνουν τις τιμές της και στο προσεχές μέλλον**. Υπάρχουν δύο μεγάλες κατηγορίες μεθόδων ανάλυσης χρονοσειρών και προβολής της τάσης. **Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι μέθοδοι διαχωρισμού** για την ταυτοποίηση των συστηματικών συνιστωσών μιας χρονοσειράς, όπως είναι η τάση, η εποχικότητα και η κυκλική μεταβολή. **Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι μέθοδοι εξομάλυνσης**. Στις μεθόδους αυτές δίνουμε διαφορετική βαρύτητα στάθμισης στις παρατηρήσεις του παρελθόντος για τη διαμόρφωση της τιμής της πρόβλεψης. Στην ενότητα αυτή **θα μας απασχολήσουν οι μέθοδοι εξομάλυνσης και πιο συγκεκριμένα οι μέθοδοι κινούμενων μέσων και οι μέθοδοι εκθετικής εξομάλυνσης**.

Απλός μέσος

Στη μέθοδο αυτή η πρόβλεψή μας F_{t+1}, που γίνεται στο τέλος της χρονικής περιόδου t και αφορά στην επόμενη περίοδο t+1, είναι απλά ο απλός μέσος όρος των διαθέσιμων παρατηρήσεων $Y_1, Y_2, \ldots, Y_t$, στη διάρκεια του παρελθόντος. Είναι δηλαδή:

$$F_{t+1} = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} Y_i \qquad (2.17)$$

Στο τέλος της χρονικής περιόδου t+1, όταν πλέον και η πραγματική τιμή της μεταβλητής που μας ενδιαφέρει Y_{t+1}, είναι διαθέσιμη, η πρόβλεψή μας αναθεωρείται από τη σχέση:

$$F_{t+2} = \frac{1}{t+1}\sum_{i=1}^{t+1} Y_i$$

ή ισοδύναμα

$$F_{t+2} = \frac{tF_{t+1} + Y_{t+1}}{t+1} \qquad (2.18)$$

Απλός κινούμενος μέσος k περιόδων 1/2

Με τη μέθοδο του απλού μέσου, όλες οι τιμές της χρονοσειράς, από τις πιο παλιές χρονικά μέχρι και τις πιο πρόσφατες, συμμετέχουν με την ίδια βαρύτητα στη διαμόρφωση της πρόβλεψής μας για την επόμενη περίοδο. Γι' αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε για τις προβλέψεις μας κινούμενους μέσους k περιόδων, μέσους δηλαδή που προκύπτουν από τις k πιο πρόσφατες τιμές της χρονοσειράς κάθε φορά. Η επιλογή του k, του πλήθους δηλαδή των τιμών που θα χρησιμοποιήσουμε εξαρτάται από τη μορφή της χρονοσειράς και την προσαρμογή της μεθόδου πρόβλεψης στα δεδομένα του παρελθόντος. Πιο συγκεκριμένα, η πρόβλεψή μας για την επόμενη περίοδο δίνεται από τη σχέση:

$$F_{t+1} = MA(k) = \frac{1}{k}\sum_{i=t-k+1}^{t} Y_i = \frac{Y_t + Y_{t-1} + \dots + Y_{t-k+1}}{k} \qquad (2.19)$$

Απλός κινούμενος μέσος k περιόδων 2/2

Στο τέλος της χρονικής περιόδου t+1, όταν πλέον και η πραγματική τιμή της μεταβλητής που μας ενδιαφέρει Yt+1, είναι διαθέσιμη, η πρόβλεψή μας αναθεωρείται από τη σχέση:

$$F_{t+2} = \frac{Y_{t+1} + Y_t + Y_{t-1} + \ldots + Y_{t-k+2}}{k}$$ ή ισοδύναμα

$$F_{t+2} = F_{t+1} + \frac{1}{k}(Y_{t+1} - Y_{t-k+1}) \qquad (2.20)$$

Δηλαδή, η νέα τιμή της πρόβλεψής μας F_{t+2} στο τέλος της περιόδου t+1, προκύπτει από απλή διόρθωση της τιμής της προηγούμενης πρόβλεψης F_{t+1} κατά ποσοστό 1/k της διαφοράς της τιμής της μεταβλητής Y_{t-k+1} από την πιο πρόσφατη χρονικά Y_{t+1}. Από τη σχέση αυτή γίνεται φανερό ότι όσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος των περιόδων k, τόσο η διόρθωση στην τιμή της νέας πρόβλεψης θα είναι μικρότερη.

Απλός σταθμικός κινούμενος μέσος k περιόδων

Μια παραλλαγή της μεθόδου του απλού κινούμενου μέσου k περιόδων είναι αυτή του απλού σταθμικού κινούμενου μέσου. Πιο συγκεκριμένα, η πρόβλεψή μας για την επόμενη περίοδο δίνεται από τη σχέση:

$$F_{t+1} = w_1 Y_t + w_2 Y_{t-1} + \ldots + w_k Y_{t-k+1} \quad (2.21)$$

όπου w_1, w_2, ..., w_k είναι οι συντελεστές στάθμισης των k τιμών της χρονοσειράς, που το άθροισμά τους ισούται με τη μονάδα. Στην περίπτωση που οι συντελεστές στάθμισης είναι ίσοι με 1/k, η μέθοδος είναι ισοδύναμη με αυτή του απλού κινούμενου μέσου k περιόδων MA(k). Η επιλογή των συντελεστών στάθμισης μπορεί να γίνει με κριτήριο τη βελτιστοποίηση κάποιου από τα αριθμητικά μέτρα ακρίβειας της μεθόδου πρόβλεψης, όπως π.χ. του μέσου τετραγώνου σφάλματος.

Παράδειγμα 2.1

Οι πωλήσεις ενός προϊόντος στη διάρκεια των 10 τελευταίων εβδομάδων, είναι αυτές που σημειώνονται στον παρακάτω πίνακα:

Εβδομάδα	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Πωλήσεις [σε χιλ. τμχ]	204	292	284	228	187	224	270	247	236	171

Το πρόβλημα που μας απασχολεί είναι η πρόβλεψη των πωλήσεων στη διάρκεια της επόμενης εβδομάδας, δηλαδή της 11ης. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τις μεθόδους του απλού κινούμενου μέσου τριών και πέντε περιόδων. Στον πίνακα 2.10 και στο σχήμα, που ακολουθούν, παρουσιάζουμε αναλυτικά τους σχετικούς υπολογισμούς και τη διαχρονική γραφική παράσταση των πωλήσεων και των προβλέψεών μας με κινούμενους μέσους τριών και πέντε περιόδων.

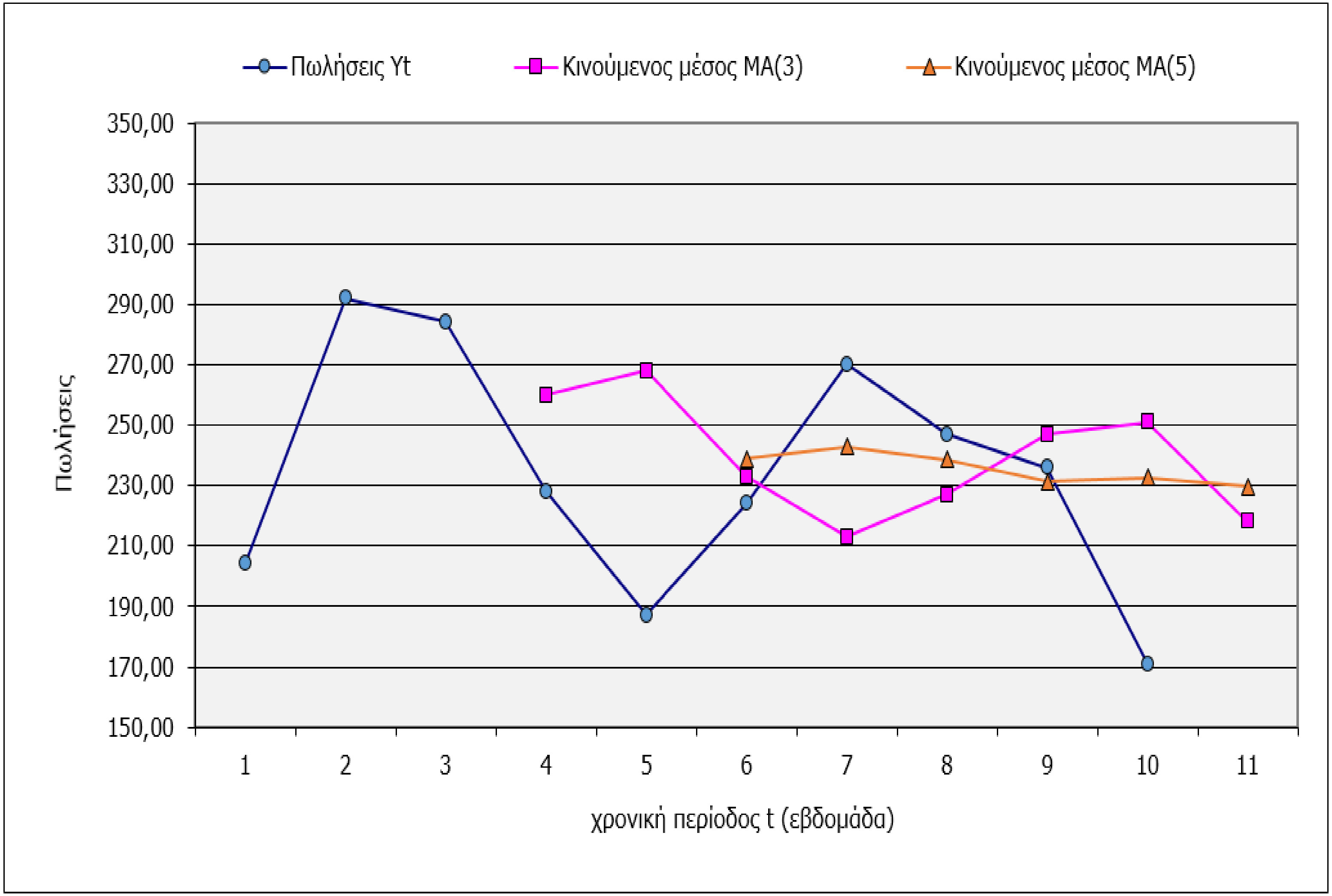
Παράδειγμα 2.1

Πίνακας 2.10: Πρόβλεψη με κινούμενους μέσους για τα δεδομένα του Παραδείγματος 2.1

Περίοδος t	Πωλήσεις Y_t	Κινούμενος μέσος 3 περιόδων		Κινούμενος μέσος 5 περιόδων	
		$F_t = MA(3)$	e_t	$F_t = MA(5)$	e_t
1	204,00	—	—	—	—
2	292,00	—	—	—	—
3	284,00	—	—	—	—
4	228,00	260,00	–32,00	—	—
5	187,00	268,00	–81,00	—	—
6	224,00	233,00	–9,00	239,00	–15,00
7	270,00	213,00	57,00	243,00	27,00
8	247,00	227,00	20,00	238,60	8,40
9	236,00	247,00	–11,00	231,20	4,80
10	171,00	251,00	–80,00	232,80	–61,80
11		218,00		229,60	

Ανάλυση του σφάλματος στις προβλέψεις		
Περίοδος υπολογισμών σφάλματος:	6η – 10η	6η – 10η
Μέσο σφάλμα	–4,60	–7,32
Μέσο απόλυτο σφάλμα	35,40	23,40
Μέσο τετράγωνο σφάλματος	2.050,20	973,37
Στατιστική U του Theil	1,07	0,74

Παράδειγμα 2.1



Διπλός κινούμενος μέσος για γραμμική τάση

Οι μέθοδοι που παρουσιάσαμε προηγουμένως, αποτυγχάνουν να προβλέψουν αποτελεσματικά σε περιπτώσεις χρονοσειράς, στην οποία συνυπάρχει συνιστώσα τάσης. Μια επέκταση της μεθόδου του απλού κινούμενου μέσου προς την κατεύθυνση αυτή είναι η μέθοδος του διπλού κινούμενου μέσου για χρονοσειρά με γραμμική τάση και χρονικό ορίζοντα m=1, 2, ... περιόδων. Πιο συγκεκριμένα, οι προβλέψεις μας γίνονται με τη βοήθεια των παρακάτω σχέσεων :

$$F_{t+m} = a_t + b_t m \tag{2.22}$$

όπου

$$a_t = L_t + (L_t - {}_2L_t) = 2L_t - {}_2L_t \tag{2.23}$$

$$b_t = \frac{2}{k-1}(L_t - {}_2L_t) \tag{2.24}$$

Παράδειγμα 2.2

Οι πωλήσεις ενός προϊόντος στη διάρκεια των 10 τελευταίων εβδομάδων, είναι αυτές που σημειώνονται στον παρακάτω πίνακα:

Εβδομάδα	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Πωλήσεις [σε χιλ. τμχ]	170	160	178	180	214	205	224	216	240	264

Ζητείται η πρόβλεψη των πωλήσεων στη διάρκεια της 11ης εβδομάδας. Επειδή από τη διαχρονική εξέλιξη της χρονοσειράς φαίνεται η ύπαρξη τάσης θα χρησιμοποιήσουμε διπλό κινούμενο μέσο τριών περιόδων για τις προβλέψεις μας. Στον πίνακα 2.14 και στο σχήμα που ακολουθούν, παρουσιάζουμε αναλυτικά τους σχετικούς υπολογισμούς και τη διαχρονική γραφική παράσταση των πωλήσεων και των προβλέψεών μας.

Παράδειγμα 2.2

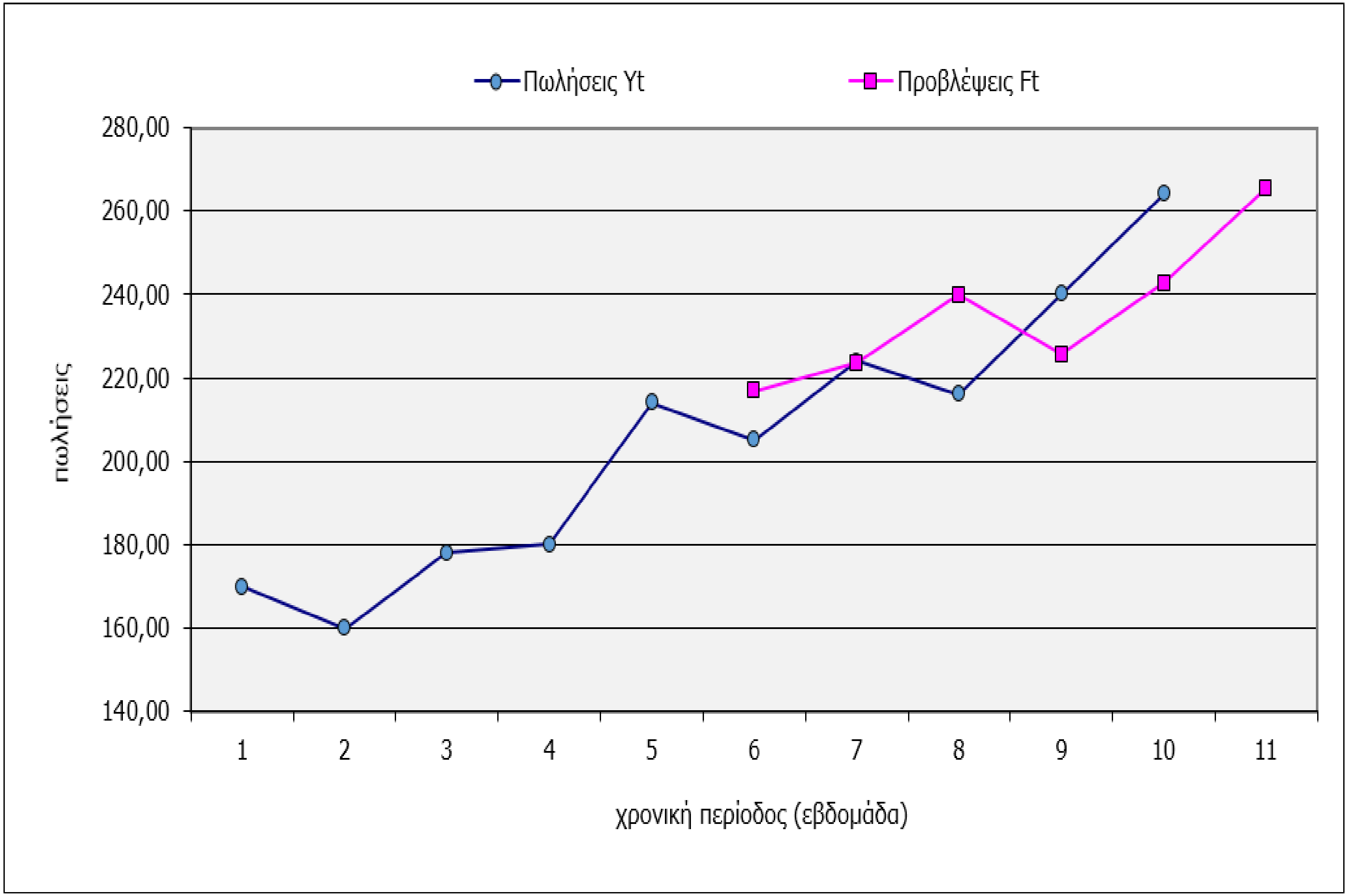
Πίνακας 2.14: Πρόβλεψη με διπλό κινούμενο μέσο 3 περιόδων για το Παράδειγμα 2.2

Περίοδος t	Πωλήσεις Y_t	L_t	${}_2L_t$	a_t	b_t	F_t	e_t
1	170,00	—	—	—	—		
2	160,00	—	—	—	—		
3	178,00	169,33	—	—	—		
4	180,00	172,67	—	—	—		
5	214,00	190,67	177,56	203,78	13,11		
6	205,00	199,67	187,67	211,67	12,00	216,89	–11,89
7	224,00	214,33	201,56	227,11	12,78	223,67	0,33
8	216,00	215,00	209,67	220,33	5,33	239,89	–23,89
9	240,00	226,67	218,67	234,67	8,00	225,67	14,33
10	264,00	240,00	227,22	252,78	12,78	242,67	21,33
11						265,56	

Ανάλυση του σφάλματος στις προβλέψεις	
Περίοδος υπολογισμών σφάλματος:	6η – 10η
Μέσο σφάλμα	0,04
Μέσο απόλυτο σφάλμα	14,36
Μέσο τετράγωνο σφάλματος	274,54
Στατιστική U του Theil	0,89

Παράδειγμα 2.2

3/3



Απλή εκθετική εξομάλυνση 1/5

Οι μέθοδοι εκθετικής εξομάλυνσης αποτελούν εξέλιξη των μεθόδων του κινούμενου μέσου, όπου όμως η βαρύτητα των προγενέστερων τιμών της υπό πρόβλεψη μεταβλητής στη διαμόρφωση της τιμής της πρόβλεψής μας, μειώνεται εκθετικά με το χρόνο. Η απλούστερη από τις μεθόδους εκθετικής εξομάλυνσης είναι αυτή της απλής εκθετικής εξομάλυνσης. Πιο συγκεκριμένα, η πρόβλεψή μας F_{t+1}, που γίνεται στο τέλος της περιόδου t και αφορά την περίοδο t+1, δίνεται από τη σχέση :

$$F_{t+1} = F_t + a(Y_t - F_t) \tag{2.25}$$

όπου α, μια σταθερή παράμετρος, που την ονομάζουμε **σταθερά εξομάλυνσης**, με τιμή μεταξύ 0 και 1. Η νέα δηλαδή πρόβλεψή μας κάθε φορά είναι απλώς η αμέσως προηγούμενη χρονικά, διορθωμένη κατά το ποσοστό α του σφάλματος της πρόβλεψης στην προηγούμενη περίοδο. Όταν η τιμή της παραμέτρου α είναι κοντά στη μονάδα, τότε η διόρθωση της τιμής της νέας πρόβλεψης θα περιλαμβάνει μεγάλο ποσοστό του σφάλματος, που παρατηρήθηκε στην προηγούμενη περίοδο και το αντίθετο.

Απλή εκθετική εξομάλυνση 2/5

Τη σχέση 2.25, μπορούμε να τη γράψουμε ισοδύναμα ως εξής:

$$F_{t+1} = aY_t + (1-a)F_t \qquad (2.26)$$

Η τιμή δηλαδή της νέας πρόβλεψης F_{t+1} προκύπτει σταθμίζοντας την πιο πρόσφατη παρατηρηθείσα τιμή της μεταβλητής Y_t με βαρύτητα α και την πιο πρόσφατη πρόβλεψη F_t με βαρύτητα (1-α). Αν τώρα στη σχέση 2.26 αντικαταστήσουμε τις προγενέστερες προβλέψεις ως συνάρτηση των τιμών της υπό πρόβλεψη μεταβλητής, προκύπτει ότι:

$$F_{t+1} = aY_t + a(1-a)Y_{t-1} + a(1-a)^2Y_{t-2} + \ldots + a(1-a)^{t-1}Y_1 + (1-a)^tF_1 \qquad (2.27)$$

Αποδεικνύεται δηλαδή ότι η πρόβλεψη με τη μέθοδο της απλής εκθετικής εξομάλυνσης διαμορφώνεται στην πραγματικότητα από όλες τις προγενέστερες τιμές της υπό πρόβλεψη μεταβλητής, η βαρύτητα όμως των παλαιότερων τιμών μειώνεται εκθετικά.

Απλή εκθετική εξομάλυνση 3/5

Δύο είναι τα βασικά προβλήματα που θα συναντήσουμε και πρέπει να μας απασχολήσουν ιδιαίτερα. Πιο συγκεκριμένα:

- Το **πρώτο πρόβλημα είναι η 'έναρξη' της μεθόδου** και της υπολογιστικής διαδικασίας. Οι σχέσεις για τον αριθμητικό υπολογισμό της πρόβλεψης είναι αναδρομικές. Χρειαζόμαστε επομένως την τιμή της 'αρχικής' μας πρόβλεψης F_1, της πρόβλεψης δηλαδή στο τέλος της περιόδου 'μηδέν' που αφορά την πρώτη χρονική περίοδο, ή την τιμή της αρχικής μας πρόβλεψης για οποιαδήποτε χρονική περίοδο που θα αποφασίσουμε την 'έναρξη' της μεθόδου. Η συμμετοχή βέβαια της 'αρχικής' μας πρόβλεψης στη διαμόρφωση της τιμής της 'τρέχουσας' πρόβλεψης στο τέλος της περιόδου t, είναι τόσο μικρότερη όσο το α δεν είναι κοντά στη μονάδα και απομακρυνόμαστε χρονικά από τη μηδενική 'αρχική' περίοδο. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι η επίδραση της αρχικής πρόβλεψης είναι σημαντική και πρέπει να μας απασχολεί **μόνο στην περίπτωση μικρού πλήθους δεδομένων (μικρό t) και μικρή - κοντά στο μηδέν - τιμή της σταθεράς εξομάλυνσης.** Διαφορετικά οποιαδήποτε τιμή της αρχικής μας πρόβλεψης F_1 δεν έχει καμιά σημαντική επίδραση στην αποτελεσματικότητα της μεθόδου πρόβλεψης και φθίνει (πρακτικά μηδενίζεται) με το χρόνο.

Απλή εκθετική εξομάλυνση 4/5

- Το δεύτερο πρόβλημα είναι η επιλογή της 'βέλτιστης' τιμής της σταθεράς εξομάλυνσης α από το πεδίο τιμών που αυτή μπορεί να πάρει. Συνήθως επιλέγουμε την τιμή της σταθεράς εξομάλυνσης, που ελαχιστοποιεί το μέσο τετράγωνο σφάλματος (από τη σχέση 2.11) ή το μέσο απόλυτο σφάλμα (από τη σχέση 2.13) της μεθόδου πρόβλεψης. Προς την κατεύθυνση αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμα τα διάφορα εργαλεία βελτιστοποίησης που σήμερα έχουμε στη διάθεσή μας σε υπολογιστικό περιβάλλον λογιστικών φύλλων (spreadsheets) σε Η/Υ, όπως για παράδειγμα το εργαλείο 'επίλυση' (solver) στο Microsoft Excel.

Απλή εκθετική εξομάλυνση 5/5

Σχήμα 2.6 : Μοντέλο πρόβλεψης απλής εκθετικής εξομάλυνσης στο Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		α = 0,20							
3–5		χρονική περίοδος	Πωλήσεις	Προβλέψεις	σφάλμα	απόλυτο σφάλμα	τετράγωνο σφάλματος	ποσοστιαίο σφάλμα	απόλυτο ποσοστιαίο σφάλμα
6									
7		1	204,00						
8		2	292,00	204,00					
9		3	284,00	221,60					
10		4	228,00	234,08	-6,08	6,08	36,97	-2,67	2,67
11		5	187,00	232,86	-45,86	45,86	2.103,51	-24,53	24,53
12		6	224,00	223,69	0,31	0,31	0,10	0,14	0,14
13		7	270,00	223,75	46,25	46,25	2.138,79	17,13	17,13
14		8	247,00	233,00	14,00	14,00	195,93	5,67	5,67
15		9	236,00	235,80	0,20	0,20	0,04	0,08	0,08
16		10	171,00	235,84	-64,84	64,84	4.204,42	-37,92	37,92
17		11		222,87					
18									
19		Μέση τιμή περιόδου 4 έως 10 :			-8,00	25,36	1.239,96	-6,01	12,59

Εισαγωγή συνάρτησης σε επιλεγμένα κελιά		
Κελί	**Συνάρτηση**	**Αντιγραφή στην περιοχή**
D8	=C7	--
D9	=C2*C8+(1-C2)*D8	D10:D17
E10	=C10-D10	E11:E16
F10	=ABS(E10)	F11:F16
G10	=E10^2	G11:G16
H10	=100*(C10-D10)/C10	H11:H16
I10	=ABS(H10)	I11:I16
E19	=AVERAGE(E10:E16)	F19:I19

Παράδειγμα 2.3

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απλής εκθετικής εξομάλυνσης για τα αριθμητικά δεδομένα (πωλήσεις) του παραδείγματος 2.1 για την πρόβλεψη των πωλήσεων στη διάρκεια της 11ης εβδομάδας. Θυμίζουμε ότι οι πωλήσεις του προϊόντος στη διάρκεια των 10 τελευταίων εβδομάδων, ήταν αυτές που σημειώνονται στον παρακάτω πίνακα:

Εβδομάδα	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Πωλήσεις [σε χιλ. τμχ]	204	292	284	228	187	224	270	247	236	171

Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο της απλής εκθετικής εξομάλυνσης χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικές τιμές της σταθεράς εξομάλυνσης α=0,2 και α=0,5. Στον πίνακα 2.15 και στο σχήμα, που ακολουθούν, παρουσιάζουμε αναλυτικά τους σχετικούς υπολογισμούς και τη διαχρονική γραφική παράσταση των πωλήσεων και των προβλέψεών μας.

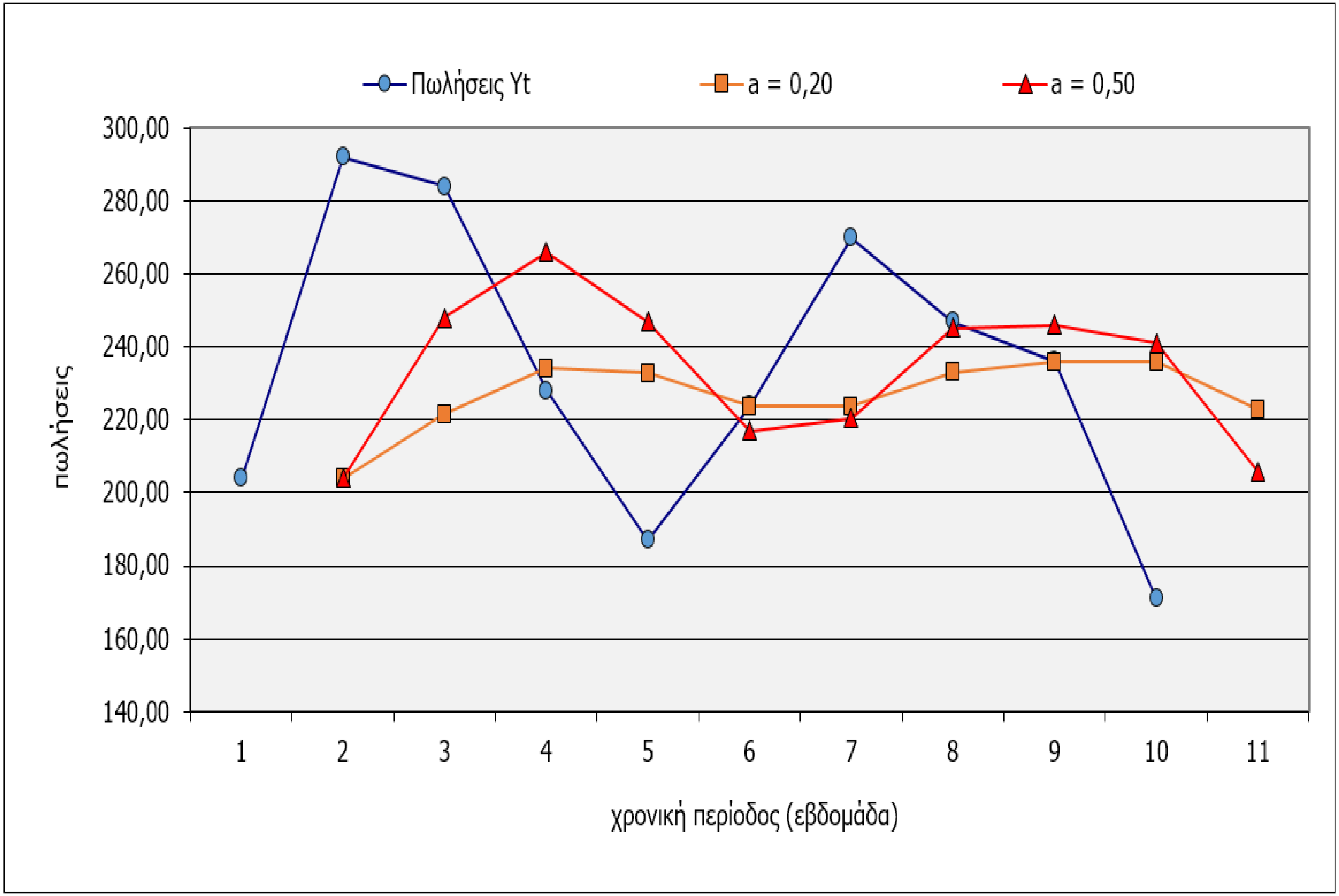
Παράδειγμα 2.3

Πίνακας 2.15: Πρόβλεψη με απλή εκθετική εξομάλυνση για το Παράδειγμα 2.3

Περίοδος t	Πωλήσεις Y_t	Απλή εκθετική εξομάλυνση με σταθερά α = 0,20		Απλή εκθετική εξομάλυνση με σταθερά α = 0,50	
		F_t	e_t	F_t	e_t
1	204,00	—	—	—	—
2	292,00	204,00		204,00	
3	284,00	221,60		248,00	
4	228,00	234,08	–6,08	266,00	–38,00
5	187,00	232,86	–45,86	247,00	–60,00
6	224,00	223,69	0,31	217,00	7,00
7	270,00	223,75	46,25	220,50	49,50
8	247,00	233,00	14,00	245,25	1,75
9	236,00	235,80	0,20	246,13	–10,13
10	171,00	235,84	–64,84	241,06	–70,06
11		222,87		206,03	

Ανάλυση του σφάλματος στις προβλέψεις		
Περίοδος υπολογισμών σφάλματος:	4η – 10η	4η – 10η
Μέσο σφάλμα	–8,00	–17,13
Μέσο απόλυτο σφάλμα	25,36	33,78
Μέσο τετράγωνο σφάλματος	1.239,96	1.793,94
Στατιστική U του Theil	0,82	0,98

Παράδειγμα 2.3



Άσκηση / Δραστηριότητα :

2.3 Οι πωλήσεις (σε χιλιάδες τεμάχια) ενός προϊόντος τους τελευταίους 12 μήνες σημειώνονται στον παρακάτω πίνακα:

Μήνας	Πωλήσεις
1	100,0
2	110,0
3	108,0
4	97,0
5	103,0
6	110,0

Μήνας	Πωλήσεις
7	101,0
8	99,0
9	105,0
10	98,0
11	112,0
12	108,0

(α) Ζητείται να γίνει πρόβλεψη των πωλήσεων για τον 13ο μήνα με τη μέθοδο του απλού κινούμενου μέσου όρου τεσσάρων ($k = 4$) και έξι περιόδων ($k = 6$).

(β) Ζητείται να γίνει πρόβλεψη των πωλήσεων για τον 13ο μήνα με τη μέθοδο της απλής εκθετικής εξομάλυνσης, με σταθερά εξομάλυνσης $a = 0{,}10$ και $a = 0{,}40$. *(Σημείωση: Ξεκινήστε τις προβλέψεις σας τον 8ο μήνα, θεωρώντας ως τιμή της απλής εκθετικής εξομάλυνσης της προηγούμενης περιόδου τη μέση τιμή της πραγματικής ζήτησης στη διάρκεια των 7 πρώτων μηνών).*

(γ) Παρουσιάστε συγκεντρωτικά σε πίνακα τα αποτελέσματα των προβλέψεών σας από τα ερωτήματα (α) και (β). Με βάση τις πραγματικές τιμές της ζήτησης και τις αντίστοιχες προβλέψεις σας για τους μήνες 8 μέχρι 12, και για κάθε περίπτωση υπολογίστε: το μέσο σφάλμα, το μέσο τετράγωνο σφάλματος, το μέσο απόλυτο ποσοστιαίο σφάλμα, όπως επίσης και μια εκτίμηση του διαστήματος εμπιστοσύνης της πρόβλεψης. Σχολιάστε συγκριτικά τα αποτελέσματα.

Ενδεικτική απάντηση :

Στον πίνακα που ακολουθεί, υπολογίζουμε το μέσο σφάλμα, το μέσο τετράγωνο σφάλματος, το μέσο απόλυτο σφάλμα και το μέσο απόλυτο ποσοστιαίο σφάλμα, για τις προβλέψεις μας με τη μέθοδο του απλού κινούμενου μέσου τεσσάρων (k=4) και έξι περιόδων (k=6).

		k= 4					k= 6				
t	Yt	Ft=Lt	et	et^2	|et|	|et|/Yt	Ft=Lt	et	et^2	|et|	|et|/Yt
1	100										
2	110										
3	108										
4	97										
5	103	103,75									
6	110	104,50									
7	101	104,50	-3,50	12,25	3,50	3,47%	104,67	-3,67	13,44	3,67	3,63%
8	99	102,75	-3,75	14,06	3,75	3,79%	104,83	-5,83	34,03	5,83	5,89%
9	105	103,25	1,75	3,06	1,75	1,67%	103,00	2,00	4,00	2,00	1,90%
10	98	103,75	-5,75	33,06	5,75	5,87%	102,50	-4,50	20,25	4,50	4,59%
11	112	100,75	11,25	126,56	11,25	10,04%	102,67	9,33	87,11	9,33	8,33%
12	108	103,50	4,50	20,25	4,50	4,17%	104,17	3,83	14,69	3,83	3,55%
13		105,75					103,83				
		average :	1,60	39,40	5,40	5,11%	average :	0,97	32,02	5,10	4,85%

Ενδεικτική απάντηση :

Στον επόμενο πίνακα, υπολογίζουμε το μέσο σφάλμα, το μέσο τετράγωνο σφάλματος, το μέσο απόλυτο σφάλμα και το μέσο απόλυτο ποσοστιαίο σφάλμα, για τις προβλέψεις μας με τη μέθοδο της απλής εκθετικής εξομάλυνσης, με σταθερά εξομάλυνσης α=0,10 και α=0,40.

		a= 0,10					a= 0,40				
t	Yt	Ft=Lt	et	et^2	$\lvert et\rvert$	$\lvert et\rvert/Yt$	Ft=Lt	et	et^2	$\lvert et\rvert$	$\lvert et\rvert/Yt$
1	100										
2	110										
3	108										
4	97										
5	103										
6	110										
7	101	104,14	-3,14	9,88	3,14	3,11%	104,14	-3,14	9,88	3,14	3,11%
8	99	103,83	-4,83	23,32	4,83	4,88%	102,89	-3,89	15,10	3,89	3,92%
9	105	103,35	1,65	2,74	1,65	1,58%	101,33	3,67	13,46	3,67	3,49%
10	98	103,51	-5,51	30,37	5,51	5,62%	102,80	-4,80	23,03	4,80	4,90%
11	112	102,96	9,04	81,72	9,04	8,07%	100,88	11,12	123,67	11,12	9,93%
12	108	103,86	4,14	17,11	4,14	3,83%	105,33	2,67	7,14	2,67	2,47%
13		104,28					106,40				
		average :	0,90	31,05	5,03	4,80%	average :	1,76	36,48	5,23	4,94%

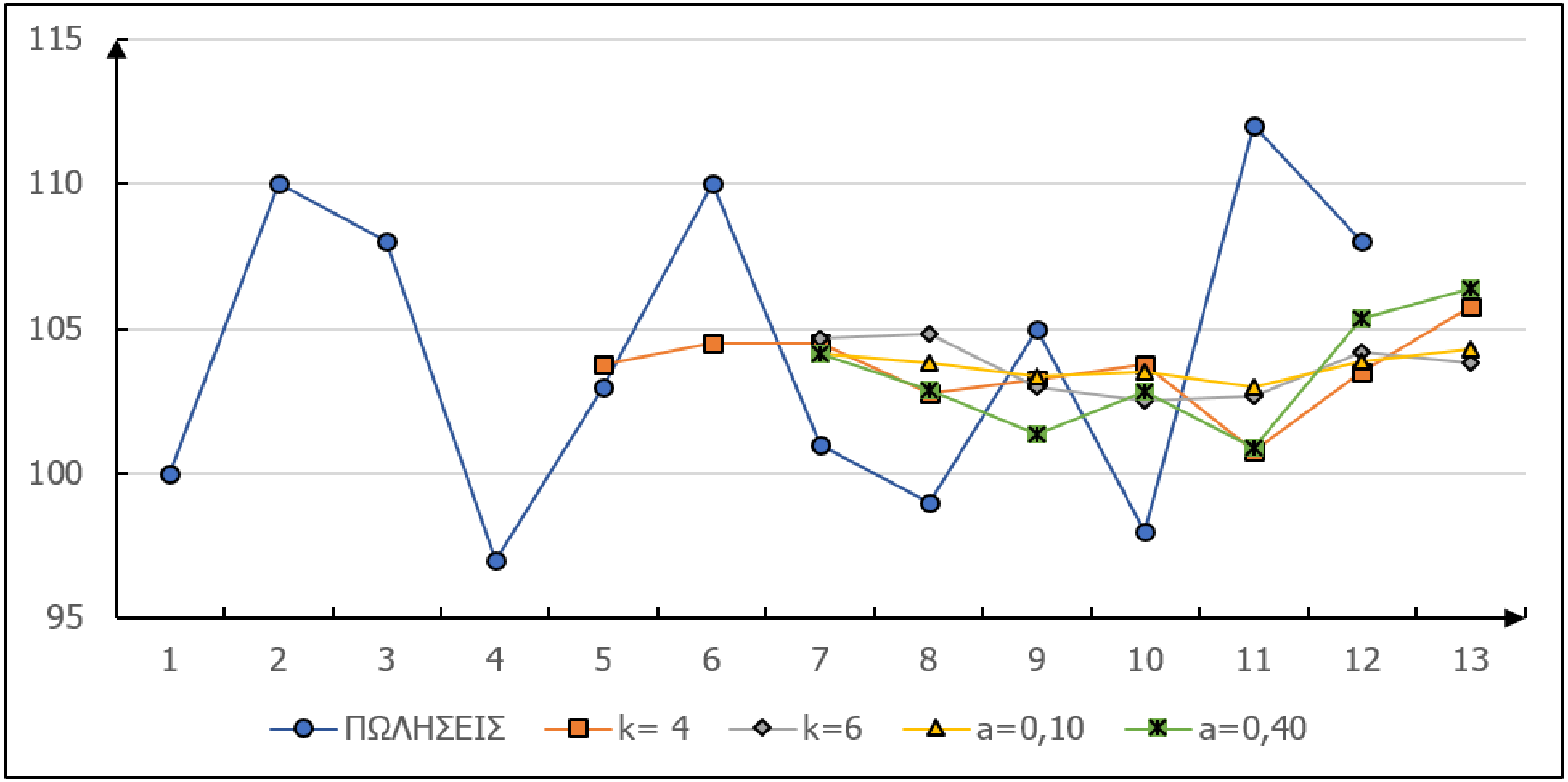
Ενδεικτική απάντηση :

Από τις τιμές των μεγεθών στους παραπάνω πίνακες, διαπιστώνουμε ότι η πρόβλεψη των πωλήσεων με τη μέθοδο της απλής εκθετικής εξομάλυνσης και α=0,10 είναι 104,28 χιλιάδες τεμάχια. Η μέθοδος αυτή είναι πιο αξιόπιστη από τις υπόλοιπες επειδή εμφανίζει μικρότερα σφάλματα και συγκεκριμένα μέσο τετράγωνο σφάλματος 31,05 και μέσο απόλυτο ποσοστιαίο σφάλμα 4,80%.

Σχετικά με την εκτίμηση του διαστήματος εμπιστοσύνης της πρόβλεψης, μια καλή προσέγγιση (χωρίς να μπλέκουμε σε πολύπλοκες στατιστικές αναλύσεις, που δεν χρειάζονται συνήθως στις προβλέψεις στην πράξη) είναι να υπολογίζουμε το διάστημα εμπιστοσύνης με βάση το μέσο τετράγωνο σφάλματος (MSE). Πιο συγκεκριμένα, η τετραγωνική ρίζα του μέσου τετραγώνου του σφάλματος αποτελεί μια καλή εκτιμήτρια της τυπικής απόκλισης σ. Με την υπόθεση επιπλέον ότι το σφάλμα της πρόβλεψης κατανέμεται ομοιόμορφα με μέση τιμή μηδέν, το διάστημα εμπιστοσύνης για την (αμέσως) επόμενη πρόβλεψη F_{t+1} θα είναι μεταξύ $[F_{t+1} + z^*\sigma]$ και $[F_{t+1} - z^*\sigma]$, με τιμές του z από σχετικούς πίνακες της κανονικής κατανομής. Δηλαδή στην περίπτωσή μας (και για z=3) η πρόβλεψή μας θα είναι στο διάστημα μεταξύ : $[104{,}28 + 3^*\sqrt{31{,}05}\,] = 121{,}00$ και $[104{,}28 - 3^*\sqrt{31{,}05}\,] = 87{,}56$.

Ενδεικτική απάντηση :

Στο σχήμα, που ακολουθεί, σημειώνουμε μια γραφική παράσταση των πραγματικών αριθμητικών τιμών της υπό πρόβλεψη μεταβλητής και των αριθμητικών τιμών των προβλέψεων με τις διαφορετικές μεθόδους πρόβλεψης.



Αιτιοκρατικές μέθοδοι ή μέθοδοι ανάλυσης των δομικών παραγόντων

Στην ενότητα αυτή θα μας απασχολήσει μια διαφορετική μεθοδολογική προσέγγιση στα προβλήματα πρόβλεψης, σύμφωνα με την οποία, **η πρόβλεψη της τιμής της μεταβλητής Y, που μας ενδιαφέρει (εξαρτημένη μεταβλητή), προκύπτει ως συνάρτηση των τιμών συγκεκριμένου πλήθους άλλων μεταβλητών Xi, i=1, 2, ..., n, οι οποίες την επηρεάζουν** (ανεξάρτητες ή ερμηνεύουσες μεταβλητές).

Όταν οι προβλέψεις μας στηρίζονται στις τιμές μιας μόνο ανεξάρτητης μεταβλητής, έχουμε την περίπτωση προβλημάτων **απλής παλινδρόμησης**. Διαφορετικά, όταν αναζητούμε τη σχέση που ερμηνεύει τη μεταβολή της υπό πρόβλεψη μεταβλητής με βάση τιμές πολλών ανεξάρτητων μεταβλητών, έχουμε την περίπτωση προβλημάτων **πολλαπλής παλινδρόμησης**.

Η **συναρτησιακή σχέση**, που συνδέει την υπό πρόβλεψη μεταβλητή Y με τη μία ή τις περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές X, **μπορεί να είναι γραμμική ή μη γραμμική**.

Απλή γραμμική παλινδρόμηση 1/9

Έστω ότι μας απασχολεί το πρόβλημα πρόβλεψης της τιμής μια μεταβλητής Y (υπό πρόβλεψη ή εξαρτημένη μεταβλητή) με τη βοήθεια μιας δεύτερης μεταβλητής X (ανεξάρτητη ή ερμηνεύουσα μεταβλητή). Στη γενική περίπτωση θα έχουμε στη διάθεσή μας ζεύγη n παρατηρήσεων (Xi, Yi), με i=1, 2, ..., n. Τα ζεύγη των παρατηρήσεων αυτών μπορεί να προέρχονται όλα από την ίδια χρονική στιγμή, οπότε έχουμε την περίπτωση παλινδρόμησης με διαστρωματικά δεδομένα, ή να 'μετρήθηκαν' διαχρονικά στη διάρκεια του παρελθόντος, οπότε έχουμε την περίπτωση παλινδρόμησης με χρονοσειρές, όπου δηλαδή η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος. Έστω τώρα ότι μεταξύ των μεταβλητών Y και X υφίσταται κάποια, γραμμική ας υποθέσουμε, εξάρτηση, που περιγράφεται από τη σχέση:

$$Y = a + bX + e \qquad (2.64)$$

Απλή γραμμική παλινδρόμηση 2/9

Οι σταθερές a και b είναι οι σταθερές παράμετροι της συναρτησιακής σχέσης και e το σφάλμα, η απόκλιση δηλαδή σε ένα διάγραμμα διασποράς των παρατηρήσεων από την ευθεία της γραμμικής σχέσης. **Οι εκτιμήτριες των παραμέτρων a και b**, προκύπτουν, με ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των αποκλίσεων των παρατηρήσεων από την ευθεία παλινδρόμησης, από τις δύο παρακάτω σχέσεις:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \qquad (2.65)$$

και

$$a = \overline{Y} - b\overline{X} \qquad (2.66)$$

Απλή γραμμική παλινδρόμηση 3/9

Πολύ συχνά παρατηρούμε ότι οι τιμές δύο μεταβλητών σχετίζονται μεταξύ τους, ακόμα και αν δεν υπάρχει προφανής ερμηνεία της σχέσης αυτής ή ίσως είναι και λανθασμένο να ισχυριστούμε ότι οι τιμές της μιας διαμορφώνονται ή επηρεάζονται άμεσα από τις τιμές της άλλης.

Σε κάθε περίπτωση **η ύπαρξη σχέσης μεταξύ δύο μεταβλητών X και Y διαπιστώνεται με τη βοήθεια του συντελεστή συσχέτισης r_{XY}**, που υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\text{Συντελεστής συσχέτισης } r_{XY} = \frac{Cov_{XY}}{S_X S_Y} = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum (X_i - \overline{X})^2}\sqrt{\sum (Y_i - \overline{Y})^2}} \qquad (2.67)$$

Απλή γραμμική παλινδρόμηση 4/9

Ο συντελεστής συσχέτισης r_{XY} παίρνει τιμές στο διάστημα από -1 (πλήρης αρνητική συσχέτιση) μέχρι +1 (πλήρης θετική συσχέτιση). Ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ δύο μεταβλητών μας δίνει στην πραγματικότητα δύο πληροφορίες:

- Το πρόσημο του συντελεστή υποδηλώνει τη θετική ή αρνητική μορφή της συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών. Θετική μορφή σημαίνει ότι οι μεταβολές στις τιμές των δύο μεταβλητών κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση (αυξάνονται ή μειώνονται μαζί), ενώ αρνητική μορφή συσχέτισης σημαίνει το αντίθετο.

- Η απόλυτη τιμή του συντελεστή είναι ένα αριθμητικό μέτρο της έντασης της συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών. Μηδενική τιμή του συντελεστή σημαίνει ανυπαρξία εξάρτησης μεταξύ των τιμών των μεταβλητών, ενώ όσο πλησιάζουμε τις δύο οριακές τιμές (+1 ή -1) αυτό σημαίνει ότι η θετική ή αρνητική μορφή της εξάρτησης μεταξύ των μεταβλητών είναι ισχυρότερη.

Απλή γραμμική παλινδρόμηση 5/9

Δύο σημεία χρειάζονται επίσης ιδιαίτερη προσοχή.

- **Το πρώτο σημείο αφορά την ερμηνεία του συντελεστή συσχέτισης** και τα συμπεράσματα που μπορούν να προκύψουν από αυτήν. Πιο συγκεκριμένα, ο συντελεστής συσχέτισης είναι αποκλειστικά και μόνο ένα μέτρο της γραμμικής εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών. Αν επομένως δύο μεταβλητές συσχετίζονται με μη γραμμική όμως σχέση, ο συντελεστής συσχέτισης δεν μπορεί να μας δώσει το μέγεθος της εξάρτησης αυτής.

- **Το δεύτερο σημείο είναι η ακρίβεια της ποσοτικής εκτίμησης της τιμής του συντελεστή συσχέτισης** και του διαστήματος εμπιστοσύνης. Πιο συγκεκριμένα, όταν το μέγεθος του δείγματος των παρατηρήσεων είναι μικρό (π.χ. μικρότερο του 30), ή όταν υπάρχουν 'ακραίες' εξαιρετικά μεγάλες ή μικρές τιμές, το σφάλμα στην εκτίμηση του συντελεστή συσχέτισης και η ευαισθησία του στη διαφοροποίηση του δείγματος είναι ιδιαίτερα σημαντικά.

Παράδειγμα 2.6

Παράδειγμα 2.6: Στον Πίνακα 2.21, που ακολουθεί, σημειώνουμε τον κυβισμό, την ισχύ, την τιμή πώλησης και την κατανάλωση 14 αυτοκινήτων γερμανικής προέλευσης που κυκλοφορούν στην ελληνική αγορά.[4] Με βάση τις πληροφορίες αυτές ζητείται να «προβλέψουμε» την τιμή πώλησης ενός οποιουδήποτε νέου μοντέλου αυτοκινήτου γερμανικής προέλευσης, ως συνάρτηση αποκλειστικά και μόνο της ισχύος του.

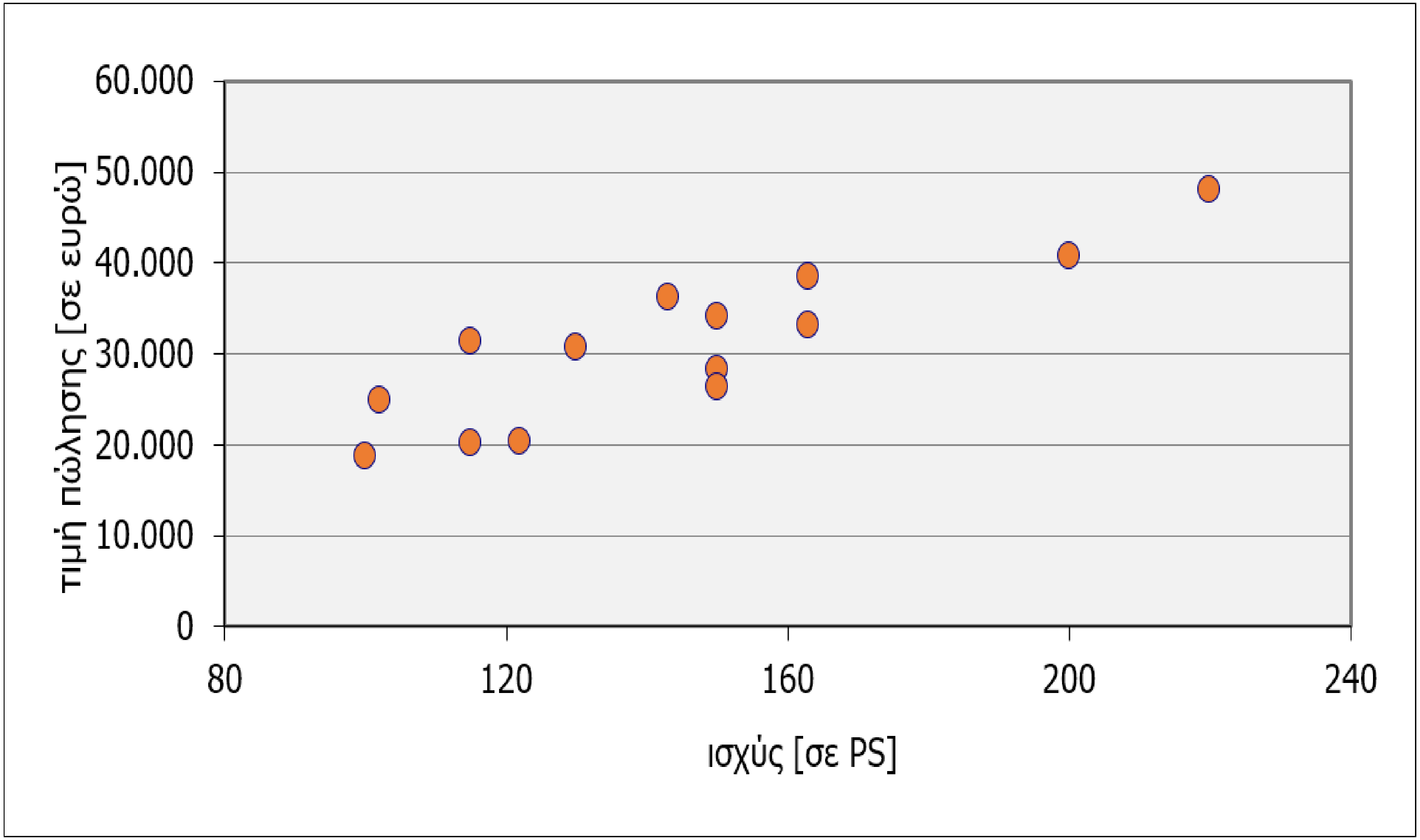
Πίνακας 2.21: Κυβισμός, ισχύς και τιμή πώλησης για 14 γερμανικής προέλευσης αυτοκίνητα της ελληνικής αγοράς

α/α	Κυβισμός σε κ.εκ.	Ισχύς σε PS	Τιμή πώλησης σε €
1	1.596	102	24.880
2	1.781	163	33.030
3	1.984	130	30.700
4	1.984	200	40.770
5	1.984	220	48.000
6	1.596	115	31.350
7	1.995	150	34.100
8	1.796	143	36.200
9	1.796	163	38.400
10	1.598	100	18.665
11	1.796	122	20.375
12	1.598	115	20.200
13	1.781	150	28.250
14	1.984	150	26.300

[4] Πρόκειται στην πραγματικότητα για στοιχεία γερμανικών αυτοκινήτων που κυκλοφορούσαν κάποια εποχή στην ελληνική αγορά (τον Ιούλιο του 2005) και προέρχονται από τον Πίνακα 2.3 με τα *διαστρωματικά* δεδομένα που παρουσιάσαμε στην αρχή αυτού του κεφαλαίου.

Παράδειγμα 2.6

Σχήμα 2.9 : Διάγραμμα διασποράς τιμής πώλησης με ισχύ



Παράδειγμα 2.6

Με το διάγραμμα διασποράς του σχήματος 2.9, παρουσιάζουμε διαγραμματικά τα στοιχεία που αφορούν την τιμή πώλησης και την ισχύ των γερμανικής προέλευσης αυτοκινήτων. Από το διάγραμμα αυτό **γίνεται φανερή η ισχυρή γραμμική εξάρτηση μεταξύ των δύο μεταβλητών** και συγκεκριμένα της μεταβλητής 'Τιμή πώλησης' και της μεταβλητής 'Ισχύς'. Τις μεταβλητές αυτές θα τις συμβολίζουμε στη συνέχεια με Y (ως την εξαρτημένη μεταβλητή) και X (ως την ανεξάρτητη ή ερμηνεύουσα μεταβλητή) αντίστοιχα.

Για την **εκτίμηση των παραμέτρων της γραμμής παλινδρόμησης μεταξύ των δύο αυτών μεταβλητών, απαιτούνται οι ενδιάμεσοι αριθμητικοί υπολογισμοί των μεγεθών**, τους οποίους παρουσιάζουμε συγκεντρωτικά στον πίνακα 2.22.

Παράδειγμα 2.6

Πίνακας 2.22: Ενδιάμεσοι υπολογισμοί για το Παράδειγμα 2.6

α/α	X	Y	$X-\bar{X}$	$Y-\bar{Y}$	$(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})$	$(X-\bar{X})^2$	$(Y-\bar{Y})^2$
1	102	24.880	–42,50	–5.921,43	251.660,71	1.806,25	35.063.316,33
2	163	33.030	18,50	2.228,57	41.228,57	342,25	4.966.530,61
3	130	30.700	–14,50	–101,43	1.470,71	210,25	10.287,76
4	200	40.770	55,50	9.968,57	553.255,71	3.080,25	99.372.416,33
5	220	48.000	75,50	17.198,57	1.298.492,14	5.700,25	295.790.859,18
6	115	31.350	–29,50	548,57	–16.182,86	870,25	300.930,61
7	150	34.100	5,50	3.298,57	18.142,14	30,25	10.880.573,47
8	143	36.200	–1,50	5.398,57	-8.097,86	2,25	29.144.573,47
9	163	38.400	18,50	7.598,57	140.573,57	342,25	57.738.287,76
10	100	18.665	–44,50	–12.136,43	540.071,07	1.980,25	147.292.898,47
11	122	20.375	–22,50	–10.426,43	234.594,64	506,25	108.710.412,76
12	115	20.200	–29,50	–10.601,43	312.742,14	870,25	112.390.287,76
13	150	28.250	5,50	–2.551,43	–14.032,86	30,25	6.509.787,76
14	150	26.300	5,50	–4.501,43	–24.757,86	30,25	20.262.859,18
Σ	2.023	431.220	0,00	0,00	3.329.160,00	15.801,50	928.434.021,43

Άσκηση / Δραστηριότητα :

Με την ολοκλήρωση αυτής της ενότητας, διαπιστώσαμε ότι οι μέθοδοι πρόβλεψης διακρίνονται σε τρεις γενικές κατηγορίες, τις οποίες μπορούμε να εφαρμόζουμε κατά περίπτωση. Σχολιάστε σύντομα ποια από αυτές τις κατηγορίες μεθόδων πρόβλεψης θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

(α) για να εκτιμήσετε το κόστος παραγωγής της μονάδας ενός συγκεκριμένου τύπου γεωργικού μηχανήματος, σε συνάρτηση με τον όγκο παραγωγής του.

(β) για να προβλέψετε το ύψος της ετήσιας ζήτησης ενός νέου προϊόντος, που καλύπτει με εντελώς νέο τρόπο ανάγκες που ήδη καλύπτονται ή δεν έχουν καλυφθεί ποτέ προηγουμένως, για κάθε ένα από τα επόμενα πέντε χρόνια από τη στιγμή της 'εισαγωγής' του για πρώτη φορά στην αγορά.

(γ) για να προβλέψετε τις μηνιαίες πωλήσεις ενός συγκεκριμένου αναψυκτικού για τον επόμενο μήνα, δεδομένου ότι για το αναψυκτικό αυτό υπάρχουν διαθέσιμα ιστορικά στοιχεία μηνιαίων πωλήσεων παρελθόντων ετών.

(δ) για να προβλέψετε τον χρόνο του νικητή της κούρσας των 400 μέτρων (σε δευτερόλεπτα) στους ολυμπιακούς αγώνες του 2024.

Για κάθε περίπτωση σημειώστε με σαφήνεια τις απαραίτητες υποθέσεις για την αποτελεσματική εφαρμογή της μεθόδου πρόβλεψης, που θα χρησιμοποιήσετε.

Ενδεικτική απάντηση :

(α) Για να εκτιμήσουμε το κόστος παραγωγής της μονάδας ενός συγκεκριμένου τύπου γεωργικού μηχανήματος, σε συνάρτηση με τον όγκο παραγωγής του, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε αιτιοκρατικές μεθόδους (ή μεθόδους ανάλυσης των δομικών παραγόντων), όπως για παράδειγμα τη μέθοδο της ανάλυσης (απλής γραμμικής) συσχέτισης (ή παλινδρόμησης), που χρησιμοποιείται συχνά στην πράξη. Η μέθοδος βασίζεται στην κατασκευή ενός (απλού γραμμικού) μαθηματικού υποδείγματος της μορφής : $Y = a + bX$, που περιγράφει τη σχέση, που συνδέει τις τιμές μιας 'εξαρτημένης' μεταβλητής Y (το κόστος παραγωγής της μονάδας του γεωργικού μηχανήματος, στην περίπτωσή μας) με τις τιμές μιας 'ανεξάρτητης' μεταβλητής X (ο όγκος παραγωγής). Προϋπόθεση βέβαια για την εφαρμογή της μεθόδου και την κατασκευή του μαθηματικού υποδείγματος είναι να έχουμε στη διάθεσή μας σχετικά ποσοτικά στοιχεία, ζεύγη δηλαδή πραγματικών τιμών του κόστους παραγωγής της μονάδας και του αντίστοιχου όγκου παραγωγής. Με τη χρήση του υποδείγματος αυτού στη συνέχεια, μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε το κόστος παραγωγής της μονάδας του συγκεκριμένου τύπου γεωργικού μηχανήματος, σε συνάρτηση με κάθε πιθανή τιμή του όγκου παραγωγής του.

Ενδεικτική απάντηση :

(β) Για να προβλέψουμε το ύψος της ετήσιας ζήτησης ενός νέου προϊόντος, που καλύπτει με εντελώς νέο τρόπο ανάγκες που ήδη καλύπτονται ή δεν έχουν καλυφθεί ποτέ προηγουμένως, για κάθε ένα από τα επόμενα πέντε χρόνια από τη στιγμή της 'εισαγωγής' του για πρώτη φορά στην αγορά, είναι φανερό ότι δεν θα έχουμε στη διάθεσή μας ποσοτικά στοιχεία για τις τιμές της υπό πρόβλεψης μεταβλητής (της ετήσιας ζήτησης) στη διάρκεια του παρελθόντος. Όταν δεν υπάρχουν διαθέσιμα τέτοια στοιχεία, οι ποσοτικές μέθοδοι δεν μπορούν να εφαρμοστούν. Προτείνεται επομένως η χρήση ποιοτικών μεθόδων πρόβλεψης, που βασίζονται σε ποιοτικές κρίσεις και αναλύσεις, όπως για παράδειγμα οι έρευνες αγοράς ή το συμβούλιο ειδικών στελεχών, που (συγκαταλέγονται στις ποιοτικές μεθόδους και) αποσκοπούν στην ανάλυση της συμπεριφοράς του καταναλωτή, προκειμένου να εξαχθούν συμπεράσματα για την προβλεπόμενη τύχη νέων προϊόντων και υπηρεσιών, όπως δηλαδή και η περίπτωση που μας απασχολεί.

Ενδεικτική απάντηση :

(γ) Για να προβλέψουμε τις μηνιαίες πωλήσεις ενός συγκεκριμένου αναψυκτικού για τον επόμενο μήνα, δεδομένου ότι για το αναψυκτικό αυτό υπάρχουν διαθέσιμα ιστορικά στοιχεία μηνιαίων πωλήσεων παρελθόντων ετών, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε μεθόδους ανάλυσης χρονοσειρών και προβολής της τάσης. Πιο συγκεκριμένα με τις μεθόδους αυτές προσπαθούμε να αναγνωρίσουμε τον τρόπο με τον οποίο διαμορφώθηκαν οι τιμές της υπό πρόβλεψη μεταβλητής στο πρόσφατο παρελθόν, ως συνάρτηση αποκλειστικά και μόνο του χρόνου και να προβάλλουμε τον ίδιο ακριβώς αυτό τρόπο και στο (βραχυπρόθεσμο) μέλλον. Στην περίπτωσή μας : (α) υπάρχουν διαθέσιμα στοιχεία των μηνιαίων πωλήσεων στο πρόσφατο παρελθόν, (β) πρόκειται να κάνουμε βραχυπρόθεσμες προβλέψεις (για τον επόμενο μήνα) και (γ) η ζήτηση του συγκεκριμένου προϊόντος (αναψυκτικό) επηρεάζεται έντονα από εποχικότητα. Γι' αυτούς τους λόγους η πλέον κατάλληλη μέθοδος πρόβλεψης είναι κάποια από τις μεθόδους ανάλυσης χρονοσειρών και προβολής της τάσης), όπως για παράδειγμα αυτή του (απλού ή διπλού στην περίπτωση γραμμικής τάσης) κινούμενου μέσου k περιόδων, ή αυτή της (απλής ή διπλής στην περίπτωση γραμμικής τάσης) εκθετικής εξομάλυνσης, με πρόσθετο στοιχείο αυτό της εποχικότητας.

Ενδεικτική απάντηση :

(δ) Για να προβλέψουμε τον χρόνο του νικητή της κούρσας των 400 μέτρων (σε δευτερόλεπτα) στους ολυμπιακούς αγώνες του 2024, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια από τις ποσοτικές (γενικά) μεθόδους, επειδή υπάρχουν διαθέσιμα ποσοτικά στοιχεία του παρελθόντος και πιο συγκεκριμένα ζεύγη πραγματικών τιμών του χρόνου του νικητή του αγώνα σε κάθε έτος διεξαγωγής ολυμπιακών αγώνων από το 1896 μέχρι σήμερα (ενδεχομένως και πρόσθετα στοιχεία σχετικά με τον τόπο και τις συνθήκες διεξαγωγής, όπως υψόμετρο, θερμοκρασία, κ.λπ.). Επομένως θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια από τις αιτιοκρατικές μεθόδους (ή μεθόδους ανάλυσης των δομικών παραγόντων), όπως για παράδειγμα αυτή της ανάλυσης (απλής γραμμικής) συσχέτισης (ή παλινδρόμησης) και να κατασκευάσουμε ένα (απλό γραμμικό) μαθηματικό υπόδειγμα της μορφής : $Y = a + bX$, που θα περιγράφει τη σχέση, που συνδέει τις τιμές της 'εξαρτημένης' μεταβλητής Y (ο χρόνος του νικητή, στην περίπτωσή μας) με τις τιμές της 'ανεξάρτητης' μεταβλητής X (το έτος διεξαγωγής).

Ενδεικτική απάντηση :

Στη συνέχεια με τη χρήση του υποδείγματος αυτού, μπορούμε να προβλέψουμε τον χρόνο του νικητή για έτος διεξαγωγής αγώνων (τιμή δηλαδή της 'ανεξάρτητης' μεταβλητής) το 2024. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τη σειρά τιμών των χρόνων του νικητή ως μια χρονοσειρά (ενδεχομένως με φθίνουσα τάση, μια και οι χρόνοι του νικητή λογικά θα μειώνονται από το πρώτο έτος διεξαγωγής των αγώνων το 1896 μέχρι σήμερα) και να χρησιμοποιήσουμε κάποια από τις μεθόδους ανάλυσης χρονοσειρών και προβολής της τάσης, όπως για παράδειγμα αυτή της εκθετικής εξομάλυνσης με πρόσθετο στοιχείο αυτό της (φθίνουσας) τάσης.

Παράδειγμα 2.10

Παράδειγμα 2.10 : Γνωστή εμπορική επιχείρηση, εισάγει στην ελληνική αγορά μικροσυσκευές και εξαρτήματα μεγάλων κατασκευαστών του εξωτερικού, τα οποία διαθέτει στη συνέχεια σε καταστήματα (και αλυσίδες καταστημάτων) λιανικής πώλησης. Στον πίνακα, που ακολουθεί, περιέχονται τα στοιχεία της μηνιαίας ζήτησης ενός από τα πλέον ανταγωνιστικά προϊόντα της επιχείρησης, στη διάρκεια των 18 τελευταίων μηνών, από τον Ιούλιο δηλαδή του 2018 μέχρι και τον Δεκέμβριο του 2019.

Πίνακας 2.29: Αριθμητικά δεδομένα του Παραδείγματος 2.10

Μήνας	2018	2019
ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ	—	396,00
ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ	—	477,00
ΜΑΡΤΙΟΣ	—	486,00
ΑΠΡΙΛΙΟΣ	—	513,00
ΜΑΪΟΣ	—	558,00
ΙΟΥΝΙΟΣ	—	549,00
ΙΟΥΛΙΟΣ	369,00	612,00
ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ	360,00	603,00
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ	324,00	657,00
ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ	360,00	666,00
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ	342,00	648,00
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ	369,00	675,00

Παράδειγμα 2.10 συνέχεια

Στο τέλος κάθε μήνα, η Διεύθυνση Πωλήσεων της επιχείρησης συντάσσει μια αναφορά σχετική με τις προβλέψεις της ζήτησης του επόμενου μήνα. Η μέθοδος πρόβλεψης, που χρησιμοποιείται μέχρι σήμερα, είναι αυτή του απλού κινούμενου μέσου τριών περιόδων, μία δηλαδή από τις πιο απλές υπολογιστικά και εύκολες στην εφαρμογή τους επιστημονικές μεθόδους πρόβλεψης.

Σε συνάντηση ανώτατων στελεχών της Διεύθυνσης Πωλήσεων, όπου παρουσιάστηκαν αναλυτικά τα αποτελέσματα με την υφιστάμενη μέθοδο πρόβλεψης, αναπτύχθηκε έντονος προβληματισμός για την αποτελεσματικότητα της συγκεκριμένης μεθόδου, μια και υπήρχαν (στο πρόσφατο παρελθόν) μεγάλες αποκλίσεις μεταξύ των πραγματικών τιμών της ζήτησης και των προβλέψεων.

Στη συζήτηση που ακολούθησε, υπήρξε συμφωνία ότι πράγματι τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης μεθόδου του απλού κινούμενου μέσου τριών περιόδων δεν ήταν ικανοποιητικά και συμφωνήθηκε να διερευνηθεί το ενδεχόμενο αλλαγής της υφιστάμενης μεθόδου πρόβλεψης. Διατυπώθηκαν όμως δύο διαφορετικές προτάσεις για τη νέα μέθοδο, που θα ήταν σκόπιμο να υιοθετηθεί.

Παράδειγμα 2.10 συνέχεια

Πιο συγκεκριμένα η πρώτη πρόταση ήταν να υιοθετηθεί ως νέα μέθοδος πρόβλεψης της ζήτησης του συγκεκριμένου προϊόντος, αυτή της απλής εκθετικής εξομάλυνσης με σταθερά εξομάλυνσης α=0,3 με το επιχείρημα ότι είναι μια *'… επιστημονική μέθοδος, πιο σύνθετη υπολογιστικά, η οποία δεν μπορεί, θα δίνει ακριβέστερα αποτελέσματα, από άλλες μεθόδους, απλούστερες υπολογιστικά ή κατά βάση εμπειρικές, που στο παρελθόν χρησιμοποιούσε η επιχείρηση'.*

Η δεύτερη πρόταση ήταν αυτή ενός έμπειρου πωλητή, ο οποίος σημείωσε ότι *'… οι πιο σύνθετες υπολογιστικά μέθοδοι ίσως δεν ταιριάζουν στη συγκεκριμένη διαχρονική συμπεριφορά της ζήτησης του προϊόντος μας'* και πρότεινε να υιοθετηθεί μια απλούστερη και κατά βάση '*εμπειρική*' μέθοδος. Σύμφωνα με την πρότασή του, η πρόβλεψη για κάθε επόμενο μήνα θα είναι ίση με την πραγματική τιμή της ζήτησης του πιο πρόσφατου τελευταίου (προηγούμενου) μήνα.

Στο τέλος της συνάντησης, σας ανατέθηκε από τον Διευθυντή Πωλήσεων, να ετοιμάσετε μια εισήγηση, που θα απαντά στα παρακάτω συγκεκριμένα ερωτήματα :

Παράδειγμα 2.10 συνέχεια

(α) Ποιες είναι οι προβλέψεις για τη ζήτηση του προϊόντος για τον επόμενο μήνα με τις τρεις διαφορετικές μεθόδους πρόβλεψης, που συζητήθηκαν στη διάρκεια της συνάντησης των στελεχών. Ποια είναι δηλαδή η πρόβλεψη για τον Ιανουάριο του 2020 με βάση : (α1) την υφιστάμενη μέθοδο του απλού κινούμενου μέσου τριών περιόδων, που χρησιμοποιήθηκε μέχρι σήμερα, (α2) τη μέθοδο της απλής εκθετικής εξομάλυνσης με σταθερά εξομάλυνσης α=0,3 και (α3) την 'εμπειρική' μέθοδο πρόβλεψης, που προτάθηκε από τον έμπειρο πωλητή.

(β) Ποια είναι η εγκυρότητα και αξιοπιστία της κάθε μεθόδου πρόβλεψης. Εξηγείστε αναλυτικά ποια από τις τρεις αυτές μεθόδους φαίνεται ότι δίνει καλύτερα αποτελέσματα και γιατί. Σχολιάστε το επιχείρημα, που διατυπώθηκε στη συνάντηση, ότι δηλαδή οι πιο σύνθετες υπολογιστικά μέθοδοι πρόβλεψης θα δίνουν '…ακριβέστερα αποτελέσματα, από άλλες μεθόδους, απλούστερες υπολογιστικά ή κατά βάση εμπειρικές'. Συμφωνείτε ή όχι με το επιχείρημα αυτό. Τεκμηριώστε την απάντησή σας. *[Υπόδειξη : Τεκμηριώστε την απάντησή σας για την εγκυρότητα και αξιοπιστία της κάθε μεθόδου πρόβλεψης με βάση τις αποκλίσεις, τα σφάλματα δηλαδή μεταξύ των προβλέψεων και των πραγματικών τιμών της ζήτησης, στη διάρκεια των 12 τελευταίων μηνών, δηλαδή από τον Ιανουάριο μέχρι και τον Δεκέμ-βριο του 2019, και σχολιάστε τις τιμές του μέσου σφάλματος, του μέσου απόλυτου σφάλματος, του μέσου τετράγωνου σφάλματος και του μέσου απόλυτου ποσοστιαίου σφάλματος].*

Παράδειγμα 2.10 συνέχεια

(γ) Να αναπαραστήσετε γραφικά τη διαχρονική μεταβολή των τιμών της ζήτησης του προϊόντος. Σημειώστε τυχόν συστηματικές συνιστώσες (όπως για παράδειγμα οριζόντιο στοιχείο, στοιχείο τάσης, εποχικότητας ή κυκλικότητας), που χαρακτηρίζουν τη διαχρονική μεταβολή αυτής της χρονοσειράς. Σχολιάστε τη γραφική παράσταση σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα του προηγούμενου ερωτήματος. Εξηγείστε για παράδειγμα αν η τιμή της σταθεράς εκθετικής εξομάλυνσης α θα ήταν καλύτερα να είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την τιμή α=0,3 και γιατί. Διατυπώστε τη δική σας πρόταση με τα γενικά χαρακτηριστικά μιας διαφορετικής μεθόδου πρόβλεψης, που θα μπορούσε να αποδειχτεί ακόμα καλύτερη, για την περίπτωση του προϊόντος, που μας απασχολεί.

Παράδειγμα 2.10

Στους πίνακες 2.30, 2.31 και 2.32, που ακολουθούν υπολογίζουμε τις προβλέψεις για κάθε μία από τις τρεις εναλλακτικές μεθόδους πρόβλεψης, όπως επίσης και το μέσο σφάλμα, το μέσο τετράγωνο σφάλματος, το μέσο απόλυτο σφάλμα και το μέσο απόλυτο ποσοστιαίο σφάλμα (με βάση τα σφάλματα κάθε μεθόδου στη διάρκεια των 12 τελευταίων μηνών). Όπως προκύπτει από τα στοιχεία αυτά η προτεινόμενη 'εμπειρική' μέθοδος είναι η πιο έγκυρη και αξιόπιστη μέθοδος επειδή το μέσο απόλυτο σφάλμα, το μέσο τετράγωνο σφάλματος και το μέσο απόλυτο ποσοστιαίο σφάλμα στη διάρκεια των 12 τελευταίων μηνών είναι τα μικρότερα. Γενικά, επιβεβαιώνεται αυτό που είναι γνωστό και από τη βιβλιογραφία, ότι δηλαδή οι πολύπλοκες υπολογιστικά μέθοδοι, δεν παράγουν απαραίτητα και πιο ακριβή αποτελέσματα από τις απλούστερες. Στο σχήμα 2.11 που ακολουθεί, σημειώνουμε γραφικά τη διαχρονική μεταβολή των τιμών της ζήτησης του προϊόντος (και επιπλέον τις προβλέψεις με τις τρεις μεθόδους).

Παράδειγμα 2.10

Πίνακας 2.30: Πρόβλεψη με τη μέθοδο του απλού κινούμενου μέσου τριών περιόδων

Μήνας	Ζήτηση D_t	$F_t = MA(3)$	Σφάλμα	Απόλυτο σφάλμα	Τετράγωνο σφάλματος	Απόλυτο ποσοστιαίο σφάλμα
ΙΟΥΛ	369,00					
ΑΥΓ	360,00					
ΣΕΠ	324,00					
ΟΚΤ	360,00					
ΝΟΕ	342,00					
ΔΕΚ	369,00					
ΙΑΝ	396,00	357,00	39,00	39,00	1.521,00	9,85%
ΦΕΒ	477,00	369,00	108,00	108,00	11.664,00	22,64%
ΜΑΡ	486,00	414,00	72,00	72,00	5.184,00	14,81%
ΑΠΡ	513,00	453,00	60,00	60,00	3.600,00	11,70%
ΜΑΪ	558,00	492,00	66,00	66,00	4.356,00	11,83%
ΙΟΥΝ	549,00	519,00	30,00	30,00	900,00	5,46%
ΙΟΥΛ	612,00	540,00	72,00	72,00	5.184,00	11,76%
ΑΥΓ	603,00	573,00	30,00	30,00	900,00	4,98%
ΣΕΠ	657,00	588,00	69,00	69,00	4.761,00	10,50%
ΟΚΤ	666,00	624,00	42,00	42,00	1.764,00	6,31%
ΝΟΕ	648,00	642,00	6,00	6,00	36,00	0,93%
ΔΕΚ	675,00	657,00	18,00	18,00	324,00	2,67%
ΙΑΝ		663,00				
Δείκτες εγκυρότητας και αξιοπιστίας			ME	MAE	MSE	MAPE
			51,00	51,00	3.349,50	9,45%

Παράδειγμα 2.10

Πίνακας 2.31: Πρόβλεψη με τη μέθοδο της απλής εκθετικής εξομάλυνσης με α=0,3

Μήνας	Ζήτηση D_t	F_t = ΕΕ (α=0,30)	Σφάλμα	Απόλυτο σφάλμα	Τετράγωνο σφάλματος	Απόλυτο ποσοστιαίο σφάλμα
ΙΟΥΛ	369,00					
ΑΥΓ	360,00					
ΣΕΠ	324,00					
ΟΚΤ	360,00					
ΝΟΕ	342,00					
ΔΕΚ	369,00	354,00	15,00			
ΙΑΝ	396,00	358,50	37,50	37,50	1.406,25	9,47%
ΦΕΒ	477,00	369,75	107,25	107,25	11.502,56	22,48%
ΜΑΡ	486,00	401,93	84,08	84,08	7.068,61	17,30%
ΑΠΡ	513,00	427,15	85,85	85,85	7.370,65	16,74%
ΜΑΪ	558,00	452,90	105,10	105,10	11.045,33	18,83%
ΙΟΥΝ	549,00	484,43	64,57	64,57	4.168,99	11,76%
ΙΟΥΛ	612,00	503,80	108,20	108,20	11.706,68	17,68%
ΑΥΓ	603,00	536,26	66,74	66,74	4.453,99	11,07%
ΣΕΠ	657,00	556,28	100,72	100,72	10.143,86	15,33%
ΟΚΤ	666,00	586,50	79,50	79,50	6.320,52	11,94%
ΝΟΕ	648,00	610,35	37,65	37,65	1.417,61	5,81%
ΔΕΚ	675,00	621,64	53,36	53,36	2.846,85	7,90%
ΙΑΝ		637,65				
Δείκτες εγκυρότητας και αξιοπιστίας			ME	MAE	MSE	MAPE
			77,54	77,54	6.620,99	13,86%

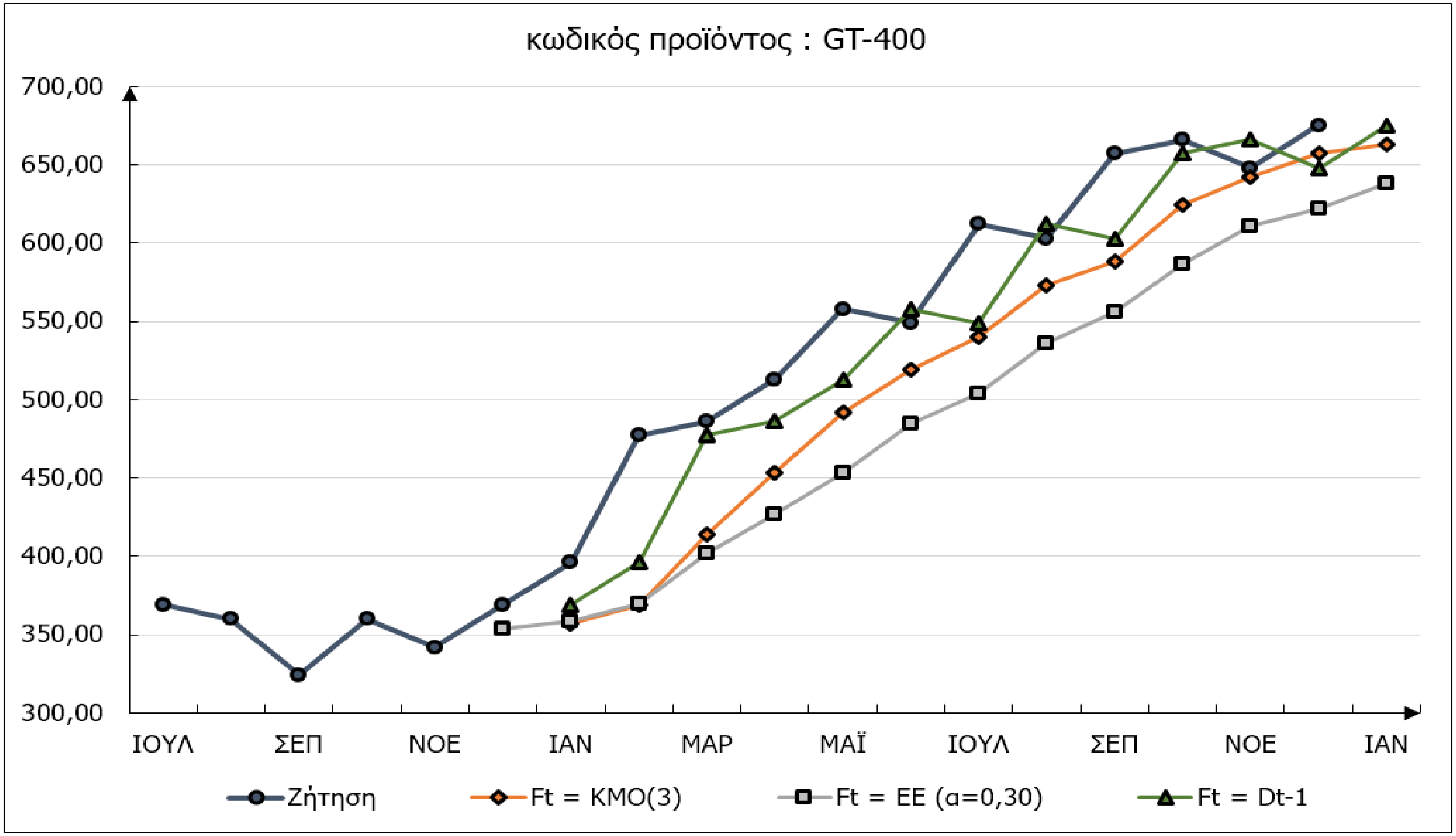
Παράδειγμα 2.10

Πίνακας 2.32: Πρόβλεψη με την «εμπειρική» μέθοδο πρόβλεψης

Μήνας	Ζήτηση D_t	$F_t = D_{t-1}$	Σφάλμα	Απόλυτο σφάλμα	Τετράγωνο σφάλματος	Απόλυτο ποσοστιαίο σφάλμα
ΙΟΥΛ	369,00					
ΑΥΓ	360,00					
ΣΕΠ	324,00					
ΟΚΤ	360,00					
ΝΟΕ	342,00					
ΔΕΚ	369,00					
ΙΑΝ	396,00	369,00	27,00	27,00	729,00	6,82%
ΦΕΒ	477,00	396,00	81,00	81,00	6.561,00	16,98%
ΜΑΡ	486,00	477,00	9,00	9,00	81,00	1,85%
ΑΠΡ	513,00	486,00	27,00	27,00	729,00	5,26%
ΜΑΪ	558,00	513,00	45,00	45,00	2.025,00	8,06%
ΙΟΥΝ	549,00	558,00	−9,00	9,00	81,00	1,64%
ΙΟΥΛ	612,00	549,00	63,00	63,00	3.969,00	10,29%
ΑΥΓ	603,00	612,00	−9,00	9,00	81,00	1,49%
ΣΕΠ	657,00	603,00	54,00	54,00	2.916,00	8,22%
ΟΚΤ	666,00	657,00	9,00	9,00	81,00	1,35%
ΝΟΕ	648,00	666,00	−18,00	18,00	324,00	2,78%
ΔΕΚ	675,00	648,00	27,00	27,00	729,00	4,00%
ΙΑΝ		675,00				
Δείκτες εγκυρότητας και αξιοπιστίας			ME	MAE	MSE	MAPE
			25,50	31,50	1.525,50	5,73%

Παράδειγμα 2.10

Σχήμα 2.11 : Διαχρονική μεταβολή των τιμών της ζήτησης του προϊόντος και επιπλέον τιμές πρόβλεψης με τις τρεις μεθόδους



Παράδειγμα 2.10

Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι η χρονοσειρά χαρακτηρίζεται – εκτός από το οριζόντιο στοιχείο – και από στοιχείο (αυξητικής) τάσης, ιδιαίτερα από τον Ιανουάριο του 2019 και μετά. Γι' αυτό το λόγο η μέθοδος του απλού κινούμενου μέσου, αλλά και αυτή της απλής εκθετικής εξομάλυνσης δεν θα δώσουν καλές προβλέψεις. Για να προσαρμοστούν (σχετικά γρήγορα) οι δύο αυτές μέθοδοι σε δεδομένα με αυξητική τάση (όπως στην περίπτωση που μας απασχολεί), πρέπει ή ο αριθμός των περιόδων στον απλό κινούμενο μέσο k περιόδων, να είναι πολύ μικρός (οριακά k=1) ή στη μέθοδο της απλής εκθετικής εξομάλυνσης, η σταθερά εξομάλυνσης να είναι πολύ μεγάλη (οριακά α=1). Οι δύο αυτές οριακές περιπτώσεις (δηλαδή απλή εκθετική με α=1 ή απλός κινούμενος μέσος με k=1) είναι στην πραγματικότητα η περίπτωση της εμπειρικής μεθόδου (που προτείνει ο έμπειρος πωλητής), η οποία γι' αυτό το λόγο δίνει καλύτερα αποτελέσματα. Μια μέθοδος, που θα μπορεί να λάβει υπόψη της και το στοιχείο της τάσης, όπως είναι για παράδειγμα η μέθοδος της διπλής εκθετικής εξομάλυνσης ή του διπλού κινούμενου μέσου ή άλλες μέθοδοι, όπως αυτή της ανάλυσης συσχέτισης με ανεξάρτητη μεταβλητή τον χρόνο, περιμένουμε ότι θα δώσει καλύτερα (πιο αξιόπιστα) αποτελέσματα.

Παράδειγμα 2.11

Παράδειγμα 2.11 : Στον πίνακα, που ακολουθεί, σημειώνονται οι τιμές πώλησης οκτώ (8) μεταχειρισμένων αυτοκινήτων (ίδιου τύπου) με τα χιλιόμετρα, που έχουν διανύσει, από την πρώτη ημέρα κυκλοφορίας τους, με βάση στοιχεία, που δημοσιεύτηκαν πρόσφατα σε σχετικά με τα αυτοκίνητα, περιοδικά και ιστοσελίδες. Όλα τα μεταχειρισμένα αυτοκίνητα του πίνακα είναι με το ίδιο έτος πρώτης κυκλοφορίας και στην ίδια περίπου καλή κατάσταση και έκδοση (ABS, ESP, προβολείς ομίχλης, κλιματισμό, υδραυλικό τιμόνι, ηλεκτρικά παράθυρα και καθρέπτες, κεντρικό κλείδωμα, κ.λπ.).

Πίνακας 2.33: Αριθμητικά δεδομένα του Παραδείγματος 2.11

α/α	Διανυθέντα χιλιόμετρα	Τιμή πώλησης (σε €)
1	36.000	12.800
2	40.000	12.500
3	25.000	13.500
4	37.000	12.700
5	26.000	13.400
6	38.000	12.500
7	26.000	13.600
8	28.000	13.200

Παράδειγμα 2.11 συνέχεια

Με βάση τα παραπάνω :

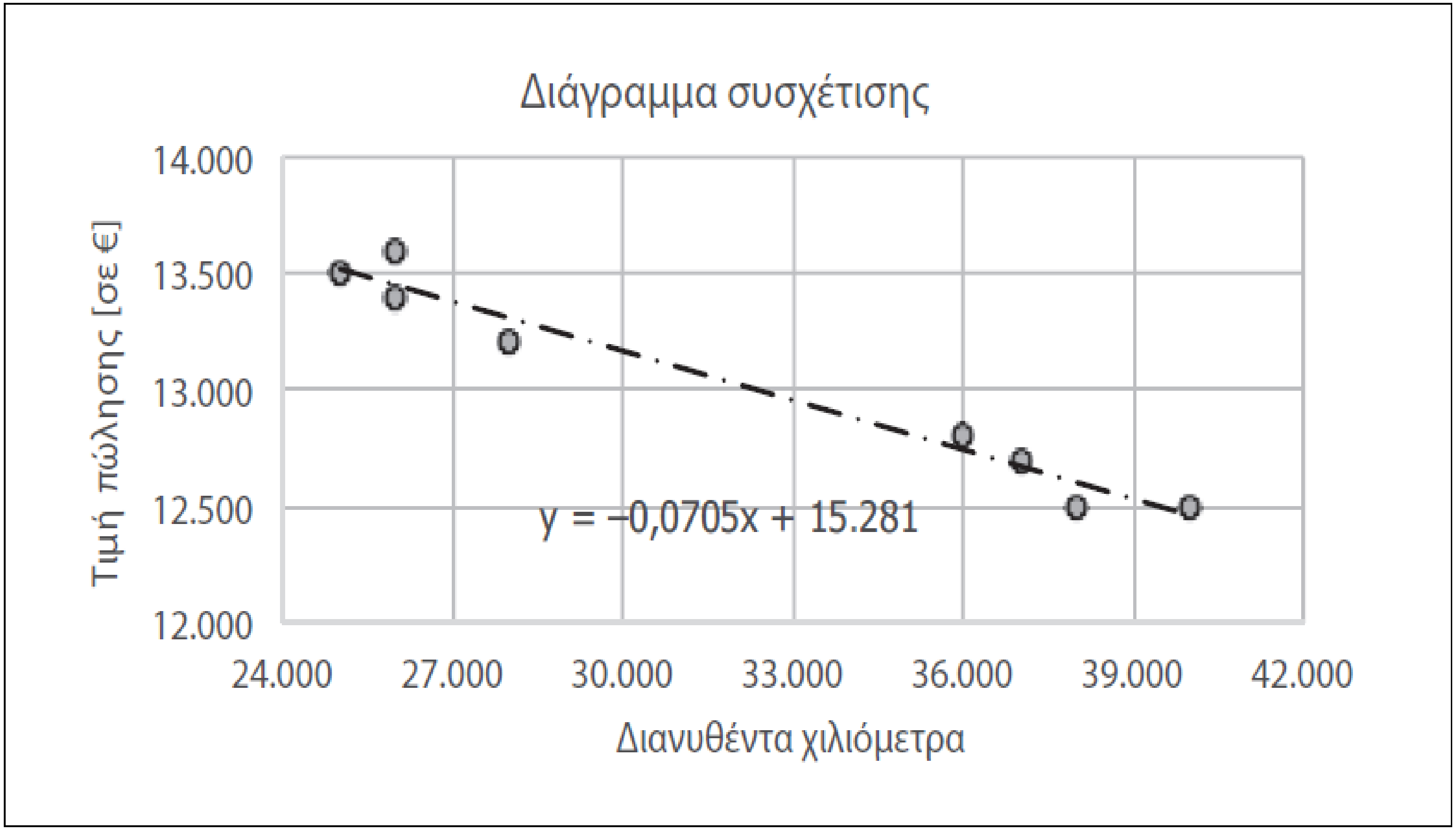
(α) Να κατασκευάσετε ένα διάγραμμα συσχέτισης της τιμής πώλησης και των διανυθέντων χιλιομέτρων και να σχολιάσετε στη συνέχεια με τη βοήθεια του διαγράμματος την ύπαρξη ή όχι γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των δύο αυτών μεταβλητών.

(β) Να βρείτε τη σχέση της απλής γραμμικής συσχέτισης (τη γραμμή απλής παλινδρόμησης δηλαδή) της μορφής : $Y = \alpha + \beta X$, που συνδέει την τιμή πώλησης ως συνάρτηση με τα διανυθέντα χιλιόμετρα.

(γ) Σχολιάστε το πρόσημο και τη φυσική σημασία των αριθμητικών τιμών των παραμέτρων α και β της γραμμικής σχέσης, που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα. Να προβλέψετε την τιμή πώλησης ενός μεταχειρισμένου αυτοκινήτου αυτού του τύπου με το ίδιο έτος κυκλοφορίας και της ίδιας περίπου κατάστασης, που έχει διανύσει 32.400 χιλιόμετρα από την πρώτη ημέρα κυκλοφορίας του.

Παράδειγμα 2.11

Σχήμα 2.12: Διάγραμμα συσχέτισης για το Παράδειγμα 2.11



Παράδειγμα 2.11

Από το διάγραμμα συσχέτισης, του Σχήματος 2.12, γίνεται φανερή η ισχυρή γραμμική εξάρτηση μεταξύ των δύο μεταβλητών «τιμή πώλησης» και «διανυθέντα χιλιόμετρα». Επιπλέον, διαπιστώνουμε ότι η αύξηση της τιμής των διανυθέντων χιλιομέτρων οδηγεί σε μείωση της τιμής πώλησης (αρνητική συσχέτιση). Τις δύο μεταβλητές «τιμή πώλησης» και «διανυθέντα χιλιόμετρα» θα τις συμβολίζουμε στη συνέχεια με Y (εξαρτημένη μεταβλητή) και X (ανεξάρτητη μεταβλητή) αντίστοιχα.

Για την εκτίμηση των παραμέτρων της σχέσης της απλής γραμμικής συσχέτισης (της μορφής δηλαδή $Y = \alpha + \beta X$) μεταξύ των δύο μεταβλητών X και Y μας χρειάζονται οι ενδιάμεσοι αριθμητικοί υπολογισμοί των μεγεθών, που συγκεντρωτικά παρουσιάζουμε στον πίνακα 2.33, που ακολουθεί (σημειώστε ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή X, τα διανυθέντα δηλαδή χιλιόμετρα, είναι εκφρασμένη σε '000 χιλιόμετρα, για τη διευκόλυνση των αριθμητικών πράξεων). Με τη βοήθεια λοιπόν των αριθμητικών στοιχείων του πίνακα 2.33 προκύπτει ότι η μέση τιμή της μεταβλητής X θα είναι m_x = 256,0/8 = 32,0 και η μέση τιμή της μεταβλητής Y θα είναι m_y = 104.200,0/8 = 13.025,0.

Παράδειγμα 2.11

Πίνακας 2.34: Ενδιάμεσοι υπολογισμοί για το Παράδειγμα 2.11

α/α	X	Y	$X-\bar{X}$	$Y-\bar{Y}$	$(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})$	$(X-\bar{X})^2$	$(Y-\bar{Y})^2$
1	36,0	12.800,0	4,0	–225,0	–900,0	16,0	50.625,0
2	40,0	12.500,0	8,0	–525,0	–4.200,0	64,0	275.625,0
3	25,0	13.500,0	–7,0	475,0	–3.325,0	49,0	225.625,0
4	37,0	12.700,0	5,0	–325,0	–1.625,0	25,0	105.625,0
5	26,0	13.400,0	–6,0	375,0	–2.250,0	36,0	140.625,0
6	38,0	12.500,0	6,0	–525,0	–3.150,0	36,0	275.625,0
7	26,0	13.600,0	–6,0	575,0	–3.450,0	36,0	330.625,0
8	28,0	13.200,0	–4,0	175,0	–700,0	16,0	30.625,0
Σ	**256,0**	**104.200,0**	**0,0**	**0,0**	**–19.600,0**	**278,0**	**1.435.000,0**

Παράδειγμα 2.11

Οι εκτιμήτριες α και β της γραμμής παλινδρόμησης υπολογίζονται στη συνέχεια από τις σχέσεις 2.65 και 2.66, ως εξής : β = –19.600,0 / 278,0 = –70,50 και α = 13.025,00 – (–70,50) × 32,00 = 15.281,12. Επομένως, η γραμμή παλινδρόμησης μεταξύ των μεταβλητών X και Y θα δίνεται από τη σχέση : $\hat{Y}$= 15.281,12 – 70,50 * X.

Με βάση λοιπόν τα παραπάνω αριθμητικά αποτελέσματα προκύπτουν τα εξής:

- Η τιμή β = - 70,50 σημαίνει ότι για κάθε μονάδα αύξησης των διανυθέντων χιλιομέτρων (κατά 1.000 χιλιόμετρα δηλαδή), η τιμή πώλησης θα μειώνεται κατά ένα μέσο ποσό 70,50€ περίπου (δηλαδή κατά 0,0705€ ή 7,05 λεπτά ανά χιλιόμετρο). Το αρνητικό πρόσημο της παραμέτρου β δηλώνει ακριβώς την αρνητική συσχέτιση μεταξύ της τιμής πώλησης και των διανυθέντων χιλιομέτρων (βλέπε και στο διάγραμμα συσχέτισης).

Παράδειγμα 2.11

- Η τιμή α = 15.281,12 είναι η τομή του άξονα μεταβολής της μεταβλητής Υ (τιμή πώλησης) και του άξονα μεταβολής της μεταβλητής Χ (διανυθέντα χιλιόμετρα). Αυτό 'τεχνικά' σημαίνει ότι 15.281,12€ θα είναι η τιμή πώλησης ενός μεταχειρισμένου αυτοκινήτου όταν τα διανυθέντα χιλιόμετρα είναι μηδέν (Χ = 0), ενός αυτοκινήτου δηλαδή, που δεν κινήθηκε (δεν οδηγήθηκε) ποτέ. Επειδή βέβαια η τιμή μηδέν στα διανυθέντα χιλιόμετρα είναι εκτός του διαστήματος μεταβολής των τιμών των διανυθέντων χιλιομέτρων του πίνακα (στις οποίες βασίστηκε η κατασκευή της γραμμικής σχέσης εξάρτησης), η 'ερμηνεία' αυτή της τιμής της παραμέτρου α, δεν είναι 'αξιόπιστη' και έχει επομένως ελάχιστο 'πρακτικό' ενδιαφέρον !
- Η πρόβλεψη της τιμής πώλησης ενός μεταχειρισμένου αυτοκινήτου αυτού του τύπου, με το ίδιο έτος κυκλοφορίας, ίδιας έκδοσης και της ίδιας περίπου κατάστασης, με 32.400 διανυθέντα χιλιόμετρα (Χ = 32,40) από την πρώτη ημέρα κυκλοφορίας του θα είναι : 15.281,12 – 70,50 x 32,40 = 12.996,80€.