Eclass4U
The best Choice for you

ΔΗΔ22

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ «ΠΡΩΤΗΣ ΜΙΚΡΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ»

ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2023-2024

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΣΠΥΡΟΣ ΒΛΑΧΟΠΟΥΛΟΣ

Eclass4U
The best Choice for you
210-5711484 6970401981
Κομνηνού Διομήδους 28,
Ηράκλειο-ΤΚ. 14122
grammateia.eclass4u@gmail.com
www.eclass4u.gr

ΑΣΚΗΣΗ 1

Υποερώτημα α

Εφόσον τα 1200 ενδοσκόπια θα χωριστούν σε x παραγγελίες, τελικά η συνάρτηση $P_{(x)}$ θα έχει τον ακόλουθο τύπο

$$P_{(x)} = \frac{1200}{x} \text{ με } x = 1, 2, 3, \ldots, 52$$

Υποερώτημα β

Εφόσον το κάθε ενδοσκόπιο κοστίζει 300€, το κόστος της αγοράς των 1200 συνολικά ενδοσκοπίων του έτους θα είναι $300 \cdot 1200 = 360.000€ \ (1)$

Επιπλέον, δεδομένου ότι η κάθε παραγγελία επιβαρύνεται με 400€, για την πραγματοποίηση των x ετήσιων παραγγελιών θα υπάρξει επιβάρυνση $400 \cdot x \,€ \ (2)$

Δίνεται, επίσης, ότι υπάρχει επιβάρυνση κι από την αποθήκευση του υλικού η οποία δίνεται από την σχέση

$$S_{(x)} = \frac{10.000}{x} \quad (3)$$

Το συνολικό ετήσιο κόστος είναι ίσο με το άθροισμα των παραπάνω επιβαρύνσεων (1), (2) και (3), συνεπώς

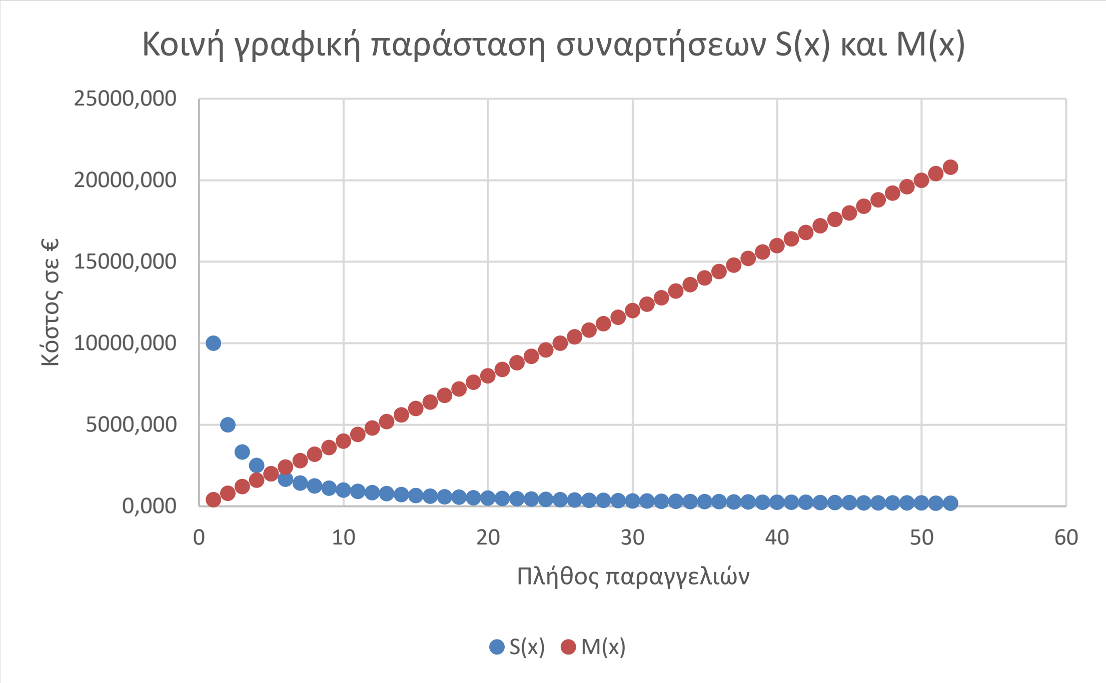
$$TC = 360.000 + 400x + \frac{10.000}{x}$$

Υποερώτημα γ

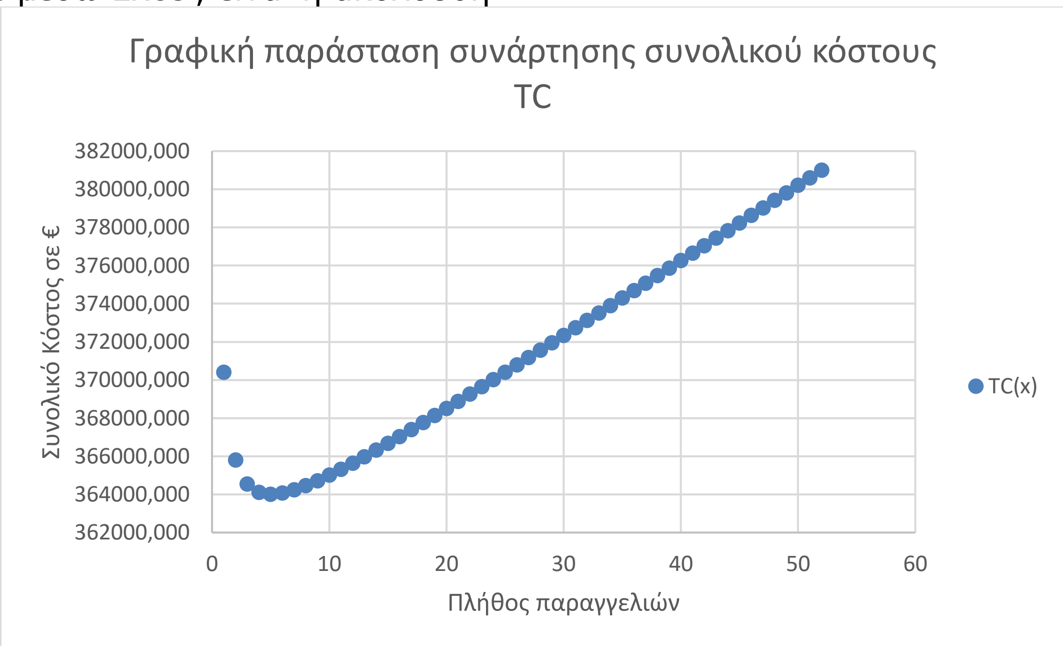
Η συνάρτηση ετήσιων διαχειριστικών εσόδων είναι η εξής

$$M_{(x)} = 400x$$

Η κοινή γραφική παράσταση των συναρτήσεων S(x) και M(x) όπως προέκυψε από το Excel είναι η ακόλουθη



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης συνολικού κόστους TC(x), όπως αυτή προέκυψε μέσω Excel, είναι η ακόλουθη



Υποερώτημα δ

$$TC'_{(x)} = \left(360.000 + 400x + \frac{10.000}{x}\right)' = (360000)' + (400x)' + \left(\frac{10000}{x}\right)' =$$
$$= 0 + 400 \cdot 1 + \frac{(10000)'x - 10000 \cdot (x)'}{x^2} = 400 - \frac{10000}{x^2}$$

$$TC''_{(x)} = \left(400 - \frac{10000}{x^2}\right)' = (400)' - \frac{(10000)' \cdot x^2 - 10000 \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} =$$
$$= 0 - \frac{0 - 10000 \cdot 2x}{x^4} = \frac{20.000}{x^3}$$

Υποερώτημα ε

Οι πιθανές θέσεις Σημείων Καμπής είναι οι ρίζες της δεύτερης παραγώγου

$$TC''_{(x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{20.000}{x^3} = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη, αφού για να είναι ένα κλάσμα ίσο με το μηδέν θα πρέπει ο αριθμητής του να είναι ίσος με το μηδέν. Συνεπώς η συνάρτηση συνολικού κόστους δεν έχει σημεία καμπής.

Υποερώτημα στ

Για να υπολογίσουμε την ζητούμενη συχνότητα παραγγελίας η οποία ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος θα εφαρμόσουμε κριτήρια 1ης και 2ης παραγώγου

Κριτήριο 1ης παραγώγου

$$TC'_{(x)} = 400 - \frac{10000}{x^2} \text{ (από υποερώτημα δ)}$$

$$TC'_{(x)} = 0 \Leftrightarrow 400 - \frac{10000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot 400 - x^2 \cdot \frac{10000}{x^2} = x^2 \cdot 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 400x^2 - 10000 = 0 \Leftrightarrow 400x^2 = 10000 \Leftrightarrow \frac{400x^2}{400} = \frac{10000}{400} \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{25} \Leftrightarrow x = \pm 5$$

Η αρνητική ρίζα $x = -5$ απορρίπτεται διότι δίνεται από εκφώνηση ότι $x \in [1,52]$

Μοναδική αποδεκτή ρίζα της πρώτης παραγώγου η $x = 5$ (πιθανό σημείο ακροτάτου)

Κριτήριο 2ης παραγώγου

$$TC''_{(x)} = \frac{20.000}{x^3} \text{ (από υποερώτημα δ)}$$

$$TC''_{(5)} = \frac{20.000}{5^3} = \frac{20.000}{125} = 160 > 0$$

Άρα για $x = 5$ η συνάρτηση συνολικού κόστους ελαχιστοποιείται (κάτι που επαληθεύεται κι από την γραφική παράσταση της συνάρτησης όπως προέκυψε από το Excel στο υποερώτημα γ)

ΑΣΚΗΣΗ 2

Υποερώτημα α

Η ζητούμενη γραμμική συνάρτηση ζήτησης διέρχεται από τα σημεία (100,10) και (80,25). Η εξίσωσή της θα βρεθεί με τον ακόλουθο τύπο

$$Q = \left(Q_1 - P_1 \cdot \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1}\right) + \left(\frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1}\right) \cdot P = 100 - 10 \cdot \frac{80 - 100}{25 - 10} + \frac{80 - 100}{25 - 10} \cdot P =$$

$$= 100 - 10 \cdot \frac{-20}{15} + \frac{-20}{15} \cdot P = 100 + \frac{200}{15} - \frac{4}{3} \cdot P = \frac{1500}{15} + \frac{200}{15} - \frac{4}{3} \cdot P =$$

$$= \frac{1700}{15} - \frac{4}{3} \cdot P \Leftrightarrow Q = \frac{340}{3} - \frac{4}{3} \cdot P \text{ (η συνάρτηση ζήτησης)}$$

Υποερώτημα β

Για την γραμμική συνάρτηση προσφοράς γνωρίζουμε ότι διέρχεται από το σημείο (50,10) και ότι έχει κλίση α=4, συνεπώς η εξίσωσή της θα βρεθεί με τον ακόλουθο τύπο

$$Q = Q_1 + \alpha \cdot (P - P_1) = 50 + 4 \cdot (P - 10) = 50 + 4P - 40 = 4P + 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q = 4P + 10 \text{ (η συνάρτηση προσφοράς)}$$

Υποερώτημα γ

Στο σημείο ισορροπίας της αγοράς ισχύουν $P_D = P_s$ και $Q_D = Q_s$

Από την δεύτερη σχέση, με αντικατάσταση των συναρτήσεων, έχουμε ισοδύναμα

$$Q_D = Q_s \Leftrightarrow \frac{340}{3} - \frac{4}{3}P = 4P + 10 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{340}{3} - 3 \cdot \frac{4}{3}P = 3 \cdot 4P + 3 \cdot 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 340 - 4P = 12P + 30 \Leftrightarrow -4P - 12P = 30 - 340 \Leftrightarrow -16P = -310 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-16P}{-16} = \frac{-310}{-16} \Leftrightarrow P = 19{,}375 \text{ νομισματικές μονάδες (η τιμή ισορροπίας)}$$

Για την ποσότητα ισορροπίας έχουμε

$$Q = 4 \cdot 19{,}375 + 10 = 87{,}5 \text{ (η ποσότητα ισορροπίας)}$$

Τελικά, για το Σημείο Ισορροπίας της αγοράς βρήκαμε $(Q_{I\Sigma}, P_{I\Sigma}) = (87{,}5,\ \ 19{,}375)$

Υποερώτημα δ

Γνωρίζουμε τις ακόλουθες συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης

$$Q = \frac{340}{3} - \frac{4}{3} \cdot P \text{ (η συνάρτηση ζήτησης)}$$

$$Q = \frac{P^2}{5} + 2P + 20 \text{ (η συνάρτηση προσφοράς)}$$

Στο σημείο ισορροπίας της αγοράς ισχύουν $P_D = P_s$ και $Q_D = Q_s$

Από την δεύτερη σχέση, με αντικατάσταση των συναρτήσεων, έχουμε ισοδύναμα

$$\frac{340}{3} - \frac{4}{3}P = \frac{P^2}{5} + 2P + 20 \Leftrightarrow 15 \cdot \frac{340}{3} - 15 \cdot \frac{4}{3}P = 15 \cdot \frac{P^2}{5} + 15 \cdot 2P + 15 \cdot 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot 340 - 5 \cdot 4P = 3 \cdot P^2 + 15 \cdot 2P + 15 \cdot 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1700 - 20P = 3P^2 + 30P + 300 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1700 - 20P - 3P^2 - 30P - 300 = 0 \Leftrightarrow -3P^2 - 50P + 1400 = 0$$

Έχουμε τριώνυμο με $\alpha = -3, \beta = -50, \gamma = 1400$

$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma = (-50)^2 - 4(-3)1400 = 2500 + 16800 = 19300 > 0$

Υπάρχουν 2 πραγματικές άνισες ρίζες

$$P_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} = \frac{-(-50) + \sqrt{19300}}{2 \cdot (-3)} = \frac{50 + 138{,}924}{-6} = \frac{188{,}924}{-6} = -31{,}487 < 0$$

Η παραπάνω λύση απορρίπτεται διότι είναι αρνητική.

$$P_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} = \frac{-(-50) - \sqrt{19300}}{2 \cdot (-3)} = \frac{50 - 138{,}924}{-6} = \frac{-88{,}924}{-6} = 14{,}821$$

Η παραπάνω λύση είναι αποδεκτή και είναι η νέα τιμή ισορροπίας της αγοράς

Για την ποσότητα ισορροπίας έχουμε

$$Q = \frac{340}{3} - \frac{4}{3} \cdot 14{,}821 = \frac{340}{3} - \frac{59{,}284}{3} = \frac{280{,}716}{3} = 93{,}572$$

Τελικά, για το Σημείο Ισορροπίας της αγοράς βρήκαμε

$$(Q_{I\Sigma}, P_{I\Sigma}) = (93{,}572,\ \ 14{,}821)$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Υποερώτημα α

$f_{1(x)} = \frac{(2x+1)^2}{(3x-2)^3}$

Πρέπει $(3x-2)^3 \neq 0 \Leftrightarrow 3x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{2}{3}$

Άρα το πεδίο ορισμού της $f_{1(x)}$ είναι το $A = R - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

Για την παράγωγο της παραπάνω συνάρτησης έχουμε :

$f'_{1(x)} = \left[\frac{(2x+1)^2}{(3x-2)^3}\right]' = \frac{[(2x+1)^2]' \cdot (3x-2)^3 - (2x+1)^2 \cdot [(3x-2)^3]'}{[(3x-2)^3]^2} =$

$= \frac{2 \cdot (2x+1)^1 \cdot (2x+1)' \cdot (3x-2)^3 - (2x+1)^2 \cdot 3 \cdot (3x \cdot 2)^2 \cdot (3x-2)'}{(3x-2)^6} =$

$= \frac{2 \cdot (2x+1) \cdot 2 \cdot (3x-2)^3 - (2x+1)^2 \cdot 3 \cdot (3x \cdot 2)^2 \cdot 3}{(3x-2)^6} =$

$= \frac{4 \cdot (2x+1)(3x-2)^3 - 9(2x+1)^2(3x \cdot 2)^2}{(3x-2)^6} =$

$= \frac{(2x+1) \cdot (3x-2)^2 \cdot [4(3x-2) - 9(2x+1)]}{(3x-2)^6} =$

$= \frac{(2x+1) \cdot (12x - 8 - 18x - 9)}{(3x-2)^4} = \frac{(2x+1) \cdot (-6x-17)}{(3x-2)^4} =$

$= -\frac{(2x+1) \cdot (6x+17)}{(3x-2)^4}$

$f_{2(x)} = e^{(x^2+3x+1)}$

Το πεδίο ορισμού της παραπάνω συνάρτησης είναι το $A = R$

Για την παράγωγο της παραπάνω συνάρτησης έχουμε :

$f'_{2(x)} = \left[e^{(x^2+3x+1)}\right]' = e^{(x^2+3x+1)} \cdot (x^2+3x+1)' =$

$= e^{(x^2+3x+1)} \cdot [(x^2)' + (3x)' + (1)'] = e^{(x^2+3x+1)} \cdot (2x+3)$

$f_{3(x)} = \frac{\ln(3x-4)}{\sqrt{x}}$

Πρέπει $3x - 4 > 0 \Leftrightarrow 3x > 4 \Leftrightarrow \frac{3x}{3} > \frac{4}{3} \Leftrightarrow x > \frac{4}{3}$ (1)

Κι επιπλέον θα πρέπει $x > 0$ (2) αφού η $\sqrt{x}$ είναι στον παρονομαστή και δεν μπορεί να είναι ίσος με μηδέν

Συναληθεύοντας τις σχέσεις (1) και (2) καταλήγουμε ότι πρέπει $x \in \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$ συνεπώς το πεδίο ορισμού της $f_{3(x)}$ είναι το $A = \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$

Για την παράγωγο της παραπάνω συνάρτησης έχουμε :

$$f'_{3(x)} = \left[\frac{\ln(3x-4)}{\sqrt{x}}\right]' = \frac{[\ln(3x-4)]' \cdot \sqrt{x} - \ln(3x-4) \cdot \left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3x-4} \cdot (3x-4)' \cdot \sqrt{x} - \ln(3x-4) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{1}{3x-4} \cdot 3\sqrt{x} - \frac{\ln(3x-4)}{2\sqrt{x}}}{x} =$$

$$= \frac{\frac{3\sqrt{x}}{3x-4} - \frac{\ln(3x-4)}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{3\sqrt{x}}{3x-4}}{\frac{x}{1}} - \frac{\frac{\ln(3x-4)}{2\sqrt{x}}}{\frac{x}{1}} = \frac{3\sqrt{x}}{x(3x-4)} - \frac{\ln(3x-4)}{2x\sqrt{x}}$$

Υποερώτημα β

Για το $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}} f_{1(x)}$ θα υπολογίσουμε τα πλευρικά όρια της συνάρτησης

$$\lim_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^-} f_{1(x)} = \lim_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^-} \frac{(2x+1)^2}{(3x-2)^3} = \frac{\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^-}(2x+1)^2}{\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^-}(3x-2)^3} = \frac{\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{3}\right)^2}{0^-} = \frac{\left(\frac{7}{3}\right)^2}{0^-} = \frac{\frac{49}{9}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^+} f_{1(x)} = \lim_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^+} \frac{(2x+1)^2}{(3x-2)^3} = \frac{\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^+}(2x+1)^2}{\lim\limits_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^+}(3x-2)^3} = \frac{\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{3}\right)^2}{0^+} = \frac{\left(\frac{7}{3}\right)^2}{0^+} = \frac{\frac{49}{9}}{0^+} = +\infty$$

Διαπιστώσαμε λοιπόν για τα πλευρικά όρια της συνάρτησης ότι

$$\lim_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^-} f_{1(x)} \neq \lim_{x\to\left(\frac{2}{3}\right)^+} f_{1(x)}$$

κι ως εκ τούτου δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}} f_{1(x)}$

Υποερώτημα γ

$$\lim_{x\to-\frac{3}{2}}\frac{2x^2+7x+6}{2x+3}=\frac{\lim_{x\to-\frac{3}{2}}(2x^2+7x+6)}{\lim_{x\to-\frac{3}{2}}(2x+3)}=\frac{2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2+7\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+6}{2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+3}=$$

$$=\frac{\frac{18}{4}-\frac{21}{2}+6}{-3+3}=\frac{\frac{18}{4}-\frac{42}{4}+\frac{24}{4}}{-3+3}=\frac{0}{0}\ (\text{απροσδιόριστη μορφή})$$

Καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή. Θα παραγοντοποιήσουμε αριθμητή και παρονομαστή ώστε να απλοποιηθεί το κλάσμα

Για τον αριθμητή $2x^2+7x+6$

Έχουμε τριώνυμο με $\alpha=2$, $\beta=7$ και $\gamma=6$.

$\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma=7^2-4\cdot2\cdot6=49-48=1>0$

άρα το τριώνυμο έχει δυο πραγματικές άνισες ρίζες

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha}=\frac{-7+\sqrt{1}}{2\cdot2}=\frac{-7+1}{4}=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2}$$

$$x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha}=\frac{-7-\sqrt{1}}{2\cdot2}=\frac{-7-1}{4}=\frac{-8}{4}=-2$$

Επομένως ο αριθμητής γράφεται ισοδύναμα

$$2x^2+7x+6=2\left[x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right]\cdot[x-(-2)]=2\left(x+\frac{3}{2}\right)\cdot(x+2)=$$

$$=(2x+3)\cdot(x+2)$$

Συνεπώς το αρχικό όριο διαμορφώνεται ως εξής

$$\lim_{x\to-\frac{3}{2}}\frac{2x^2+7x+6}{2x+3}=\lim_{x\to-\frac{3}{2}}\frac{(2x+3)\cdot(x+2)}{2x+3}=\lim_{x\to-\frac{3}{2}}(x+2)=-\frac{3}{2}+2=$$

$$=-\frac{3}{2}+\frac{4}{2}=\frac{1}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

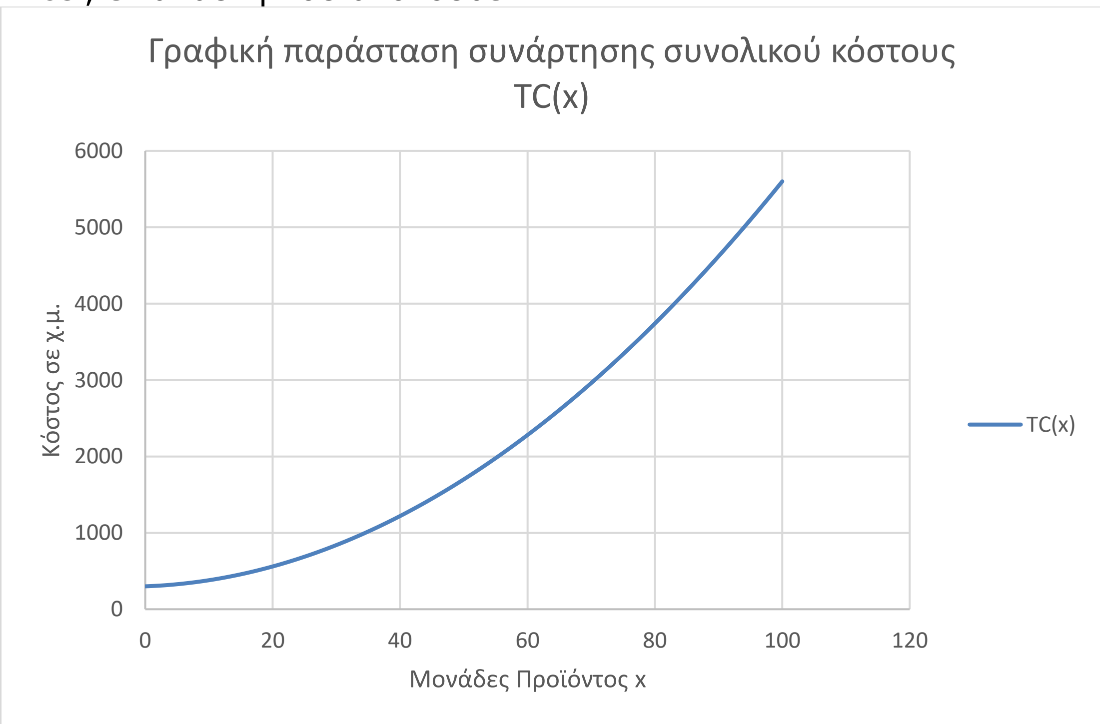
Υποερώτημα α

Για την συνάρτηση συνολικού κόστους έχουμε
$\mathrm{TC} = \mathrm{VC} + \mathrm{FC} = 0{,}5\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} + 300$

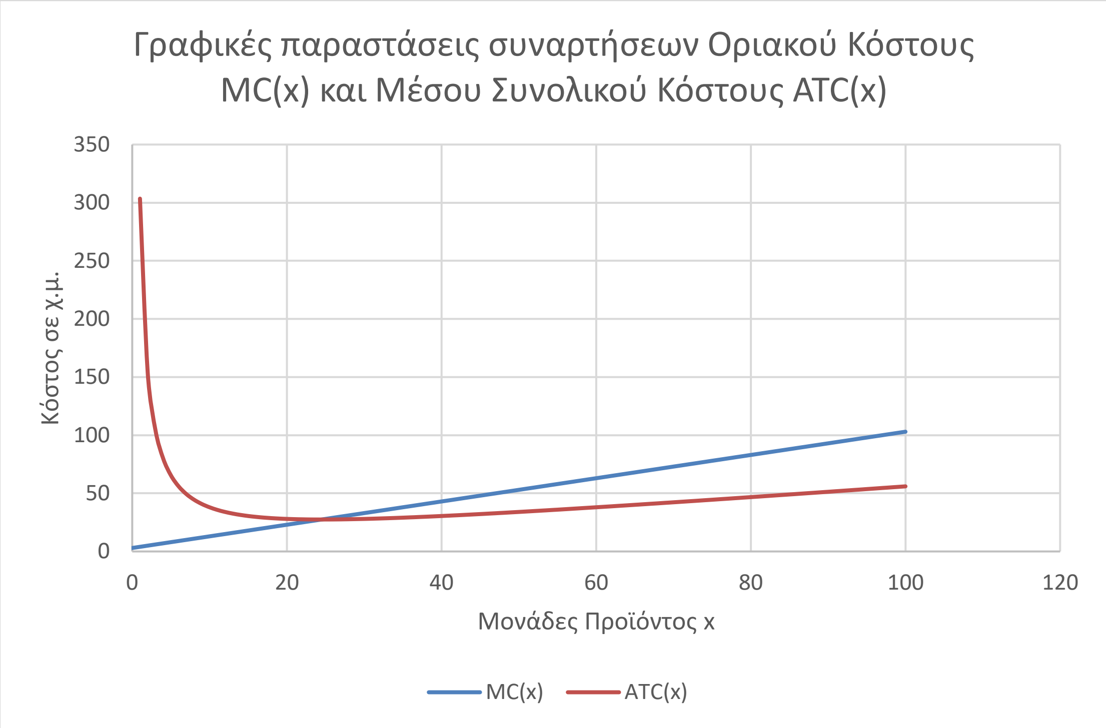
Για την συνάρτηση οριακού κόστους έχουμε
$\mathrm{MC} = (\mathrm{TC})' = (0{,}5\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} + 300)' = (0{,}5\mathrm{x}^2)' + (3\mathrm{x})' + (300)' =$
$= 0{,}5 \cdot (\mathrm{x}^2)' + 3 \cdot (\mathrm{x})' + 0 = 0{,}5 \cdot 2\mathrm{x} + 3 \cdot 1 = \mathrm{x} + 3$

Για την συνάρτηση μέσου συνολικού κόστους έχουμε
$$\mathrm{ATC} = \frac{\mathrm{TC}}{\mathrm{x}} = \frac{0{,}5\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} + 300}{\mathrm{x}} = \frac{0{,}5\mathrm{x}^2}{\mathrm{x}} + \frac{3\mathrm{x}}{\mathrm{x}} + \frac{300}{\mathrm{x}} = 0{,}5\mathrm{x} + 3 + \frac{300}{\mathrm{x}}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης συνολικού κόστους, όπως προέκυψε από το Excel, είναι αυτή που ακολουθεί



Η κοινή γραφική παράσταση των συναρτήσεων οριακού κόστους και μέσου συνολικού κόστους, όπως προέκυψε από το Excel, είναι αυτή που ακολουθεί



Υποερώτημα β

Για την ζητούμενη συνάρτηση συνολικών εσόδων έχουμε
$\mathrm{TR} = \mathrm{P} \cdot \mathrm{x} = (-\mathrm{x} + 150) \cdot \mathrm{x} = -\mathrm{x}^2 + 150\mathrm{x}$

Αντίστοιχα, για την ζητούμενη συνάρτηση καθαρού κέρδους
$\Pi = \mathrm{TR} - \mathrm{TC} = -\mathrm{x}^2 + 150\mathrm{x} - (0{,}5\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} + 300) =$
$= -\mathrm{x}^2 + 150\mathrm{x} - 0{,}5\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} - 300 = -1{,}5\mathrm{x}^2 + 147\mathrm{x} - 300$

Υποερώτημα γ

Για να υπολογίσουμε την ζητούμενη ποσότητα παραγωγής η οποία μεγιστοποιεί το καθαρό κέρδος θα εφαρμόσουμε κριτήρια 1ης και 2ης παραγώγου

Κριτήριο 1ης παραγώγου
$\Pi'_{(\mathrm{x})} = (-1{,}5\mathrm{x}^2 + 147\mathrm{x} - 300)' = (-1{,}5\mathrm{x}^2)' + (147\mathrm{x})' - (300)' =$
$= -1{,}5 \cdot 2 \cdot \mathrm{x}^{2-1} + 147 \cdot 1 - 0 = -3\mathrm{x} + 147$
Για τις ρίζες της πρώτης παραγώγου, έχουμε
$\Pi'_{(\mathrm{x})} = 0 \Leftrightarrow -3\mathrm{x} + 147 = 0 \Leftrightarrow -3\mathrm{x} = -147 \Leftrightarrow \dfrac{-3\mathrm{x}}{-3} = \dfrac{-147}{-3} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathrm{x} = 49$ (πιθανό σημείο ακροτάτου)

Κριτήριο 2ης παραγώγου
$\Pi''_{(\mathrm{x})} = (-3\mathrm{x} + 147)' = (-3\mathrm{x})' + (147)' = -3 \cdot 1 + 0 = -3$
$\Pi''_{(49)} = -3 < 0$
Άρα για ποσότητα παραγωγής $\mathrm{x} = 49$ μονάδες προϊόντος, η συνάρτηση κερδών μεγιστοποιείται.