Ποσοτικές Μέθοδοι

ΔΗΔ22

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ
«ΓΕ- ΕΞΑΜΗΝΟΥ»

«ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2023-2024»

[22-11-23]

ΑΣΚΗΣΗ 1

Υποερώτημα Α

Αρχικά βάζουμε τις παρατηρήσεις x_i (ποσοστό ανεργίας) σε αύξουσα σειρά. Επίσης, δημιουργούμε τις κατάλληλες στήλες που θα μας χρειαστούν για την εύρεση των ζητούμενων στατιστικών μέτρων, δηλαδή τις στήλες $x_i - \bar{x}$, $(x_i - \bar{x})^2$ και$(x_i - \bar{x})^3$.

i	X_i (% ανεργίας)	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^3$
1	9,9	-1,76	3,10	-5,45
2	10,3	-1,36	1,85	-2,52
3	10,7	-0,96	0,92	-0,88
4	10,8	-0,86	0,74	-0,64
5	10,8	-0,86	0,74	-0,64
6	11,2	-0,46	0,21	-0,10
7	11,2	-0,46	0,21	-0,10
8	11,3	-0,36	0,13	-0,05
9	11,5	-0,16	0,03	0,00
10	11,5	-0,16	0,03	0,00
11	11,5	-0,16	0,03	0,00
12	11,5	-0,16	0,03	0,00
13	11,6	-0,06	0,00	0,00
14	11,7	0,04	0,00	0,00
15	12,4	0,74	0,55	0,41
16	12,5	0,84	0,71	0,59
17	12,6	0,94	0,88	0,83
18	12,6	0,94	0,88	0,83
19	13,6	1,94	3,76	7,30
20	13,9	2,24	5,02	11,24
Σύνολο	233,1		19,81	10,82

Αριθμητικός μέσος (μέσος όρος)

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \ldots + x_{20}) = \frac{1}{20} \cdot 233{,}1 = 11{,}66\%$$

Τυπική απόκλιση

Για να βρεθεί τυπική απόκλιση θα πρέπει πρώτα να υπολογιστεί η διακύμανση S^2
Για την διακύμανση S^2 έχουμε

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \Sigma(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{20-1} \cdot 19{,}81 = \frac{19{,}81}{19} = 1{,}04$$

Επομένως, για την τυπική απόκλιση
$S = +\sqrt{S^2} = \sqrt{1{,}04} = 1{,}02\%$

Διάμεσος
Έχουμε $n = 20$ παρατηρήσεις, δηλαδή άρτιο πλήθος, συνεπώς για την εύρεση της διαμέσου έχουμε

$$M = 0{,}5 \cdot \left[X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}\right)}\right] = 0{,}5 \cdot \left[X_{\left(\frac{20}{2}+1\right)} + X_{\left(\frac{20}{2}\right)}\right] = 0{,}5 \cdot \left[X_{(11)} + X_{(10)}\right] =$$
$$= 0{,}5 \cdot (11{,}5 + 11{,}5) = 0{,}5 \cdot 23 = 11{,}5\%$$

1ο τεταρτημόριο

$$\frac{i(n+1)}{4} = \frac{1(20+1)}{4} = \frac{21}{4} = 5{,}25 \text{ Επομένως } A_Q = 5 \text{ και } \Delta_Q = 0{,}25$$

Άρα, από τον τύπο για τα τεταρτημόρια παίρνουμε :

$$Q_i = X_{(A_Q)} + \Delta_Q \cdot \left[X_{(A_Q+1)} - X_{(A_Q)}\right] \Leftrightarrow Q_1 = X_{(5)} + 0{,}25 \cdot \left[X_{(5+1)} - X_{(5)}\right] =$$
$$= X_{(5)} + 0{,}25 \cdot \left[X_{(6)} - X_{(5)}\right] = 10{,}8 + 0{,}25 \cdot (11{,}2 - 10{,}8) = 10{,}8 + 0{,}25 \cdot 0{,}4 =$$
$$= 10{,}8 + 0{,}1 \Leftrightarrow \mathbf{Q_1} = \mathbf{10{,}9}\%$$

3ο τεταρτημόριο

$$\frac{i(n+1)}{4} = \frac{3(20+1)}{4} = \frac{63}{4} = 15{,}75 \text{ Επομένως } A_Q = 15 \text{ και } \Delta_Q = 0{,}75$$

Άρα, από τον τύπο για τα τεταρτημόρια παίρνουμε :

$$Q_i = X_{(A_Q)} + \Delta_Q \cdot \left[X_{(A_Q+1)} - X_{(A_Q)}\right] \Leftrightarrow Q_3 = X_{(15)} + 0{,}75 \cdot \left[X_{(15+1)} - X_{(15)}\right] =$$
$$= X_{(15)} + 0{,}75 \cdot \left[X_{(16)} - X_{(15)}\right] = 12{,}4 + 0{,}75 \cdot (12{,}5 - 12{,}4) =$$
$$= 12{,}4 + 0{,}75 \cdot 0{,}1 = 12{,}4 + 0{,}08 \Leftrightarrow \mathbf{Q_3} = \mathbf{12{,}48}\ \%$$

Συντελεστής ασυμμετρίας Pearson β3

$$\beta_3 = \frac{\frac{1}{n} \cdot \Sigma(x_i - \bar{x})^3}{S^3} = \frac{\frac{1}{20} \cdot 10{,}82}{1{,}02^3} = \frac{0{,}54}{1{,}06} = 0{,}51 > 0$$

Εφόσον ο συντελεστής β3 προέκυψε θετικός, η κατανομή των παρατηρήσεων του δείγματος παρουσιάζει θετική ασυμμετρία, δηλαδή μεγαλύτερη συγκέντρωση παρατηρήσεων προς τις μικρότερες τιμές του δείγματος.

Σε ανάλογο συμπέρασμα καταλήξαμε μέσω των τιμών της μέσης τιμής και της διαμέσου, αφού $\bar{x} = 11{,}66 > M = 11{,}5$

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία και για τις παρατηρήσεις y_i (ΔΤΚ).

i	y_i (ΔΤΚ)	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^3$
1	1,8	-5,51	30,36	-167,28
2	2,5	-4,81	23,14	-111,28
3	2,7	-4,61	21,25	-97,97
4	2,8	-4,51	20,34	-91,73
5	3	-4,31	18,58	-80,06
6	4,6	-2,71	7,34	-19,90
7	6,1	-1,21	1,46	-1,77
8	6,2	-1,11	1,23	-1,37
9	7	-0,31	0,10	-0,03
10	7,2	-0,11	0,01	0,00
11	7,2	-0,11	0,01	0,00
12	8,5	1,19	1,42	1,69
13	8,9	1,59	2,53	4,02
14	9,1	1,79	3,20	5,74
15	10,2	2,89	8,35	24,14
16	11,3	3,99	15,92	63,52
17	11,4	4,09	16,73	68,42
18	11,6	4,29	18,40	78,95
19	12	4,69	22,00	103,16
20	12,1	4,79	22,94	109,90
Σύνολο	146,2		235,32	-111,88

Αριθμητικός μέσος (μέσος όρος)

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \dots + y_{20}) = \frac{1}{20} \cdot 146{,}2 = 7{,}31\%$$

Τυπική απόκλιση

Για να βρεθεί τυπική απόκλιση θα πρέπει πρώτα να υπολογιστεί η διακύμανση S^2

Για την διακύμανση S^2 έχουμε

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \Sigma(y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{20-1} \cdot 235{,}32 = \frac{235{,}32}{19} = 12{,}39$$

Επομένως, για την τυπική απόκλιση

$$S = +\sqrt{S^2} = \sqrt{12{,}39} = 3{,}52\%$$

Διάμεσος

Έχουμε $n = 20$ παρατηρήσεις, δηλαδή άρτιο πλήθος, συνεπώς για την εύρεση της διαμέσου έχουμε

$$M = 0{,}5 \cdot \left[Y_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} + Y_{\left(\frac{n}{2}\right)}\right] = 0{,}5 \cdot \left[Y_{\left(\frac{20}{2}+1\right)} + Y_{\left(\frac{20}{2}\right)}\right] = 0{,}5 \cdot \left[Y_{(11)} + Y_{(10)}\right] =$$
$$= 0{,}5 \cdot (7{,}2 + 7{,}2) = 0{,}5 \cdot 14{,}4 = 7{,}2\%$$

1ο τεταρτημόριο

$$\frac{i(n+1)}{4} = \frac{1(20+1)}{4} = \frac{21}{4} = 5{,}25 \text{ Επομένως } A_Q = 5 \text{ και } \Delta_Q = 0{,}25$$

Άρα, από τον τύπο για τα τεταρτημόρια παίρνουμε :

$$Q_i = X_{(A_Q)} + \Delta_Q \cdot \left[Y_{(A_Q+1)} - Y_{(A_Q)}\right] \Leftrightarrow Q_1 = Y_{(5)} + 0{,}25 \cdot \left[Y_{(5+1)} - Y_{(5)}\right] =$$
$$= Y_{(5)} + 0{,}25 \cdot \left[Y_{(6)} - Y_{(5)}\right] = 3 + 0{,}25 \cdot (4{,}6 - 3) = 3 + 0{,}25 \cdot 1{,}6 =$$
$$= 3 + 0{,}4 \Leftrightarrow \mathbf{Q_1 = 3{,}4}\%$$

3ο τεταρτημόριο

$$\frac{i(n+1)}{4} = \frac{3(20+1)}{4} = \frac{63}{4} = 15{,}75 \text{ Επομένως } A_Q = 15 \text{ και } \Delta_Q = 0{,}75$$

Άρα, από τον τύπο για τα τεταρτημόρια παίρνουμε :

$$Q_i = Y_{(A_Q)} + \Delta_Q \cdot \left[Y_{(A_Q+1)} - Y_{(A_Q)}\right] \Leftrightarrow Q_3 = Y_{(15)} + 0{,}75 \cdot \left[Y_{(15+1)} - Y_{(15)}\right] =$$
$$= Y_{(15)} + 0{,}75 \cdot \left[Y_{(16)} - Y_{(15)}\right] = 10{,}2 + 0{,}75 \cdot (11{,}3 - 10{,}2) =$$
$$= 10{,}2 + 0{,}75 \cdot 1{,}1 = 10{,}2 + 0{,}83 \Leftrightarrow \mathbf{Q_3 = 11{,}03}\ \%$$

Συντελεστής ασυμμετρίας Pearson β_3

$$\beta_3 = \frac{\frac{1}{n} \cdot \Sigma(y_i - \bar{y})^3}{S^3} = \frac{\frac{1}{20} \cdot (-111{,}88)}{3{,}52^3} = \frac{-5{,}59}{43{,}61} = -0{,}13 < 0$$

Εφόσον ο συντελεστής β_3 προέκυψε αρνητικός, η κατανομή των παρατηρήσεων του δείγματος παρουσιάζει αρνητική ασυμμετρία, δηλαδή μεγαλύτερη συγκέντρωση παρατηρήσεων προς τις μεγαλύτερες τιμές του δείγματος.

Δεν καταλήγουμε σε ανάλογο συμπέρασμα μέσω των τιμών της μέσης τιμής και της διαμέσου, αφού $\bar{x} = 7{,}31 > M = 7{,}2$, δηλαδή στην συγκεκριμένη περίπτωση δεν είμαστε σε θέση να επαληθεύσουμε το συμπέρασμα που προέκυψε μέσω του συντελεστή β_3

Υποερώτημα Β

Συντελεστής μεταβλητότητας για το ποσοστό ανεργίας

$$\mathrm{CV_x} = \frac{s_x}{\bar{x}} = \frac{1{,}02}{11{,}66} = 0{,}0875 \text{ ή } 8{,}75\%$$

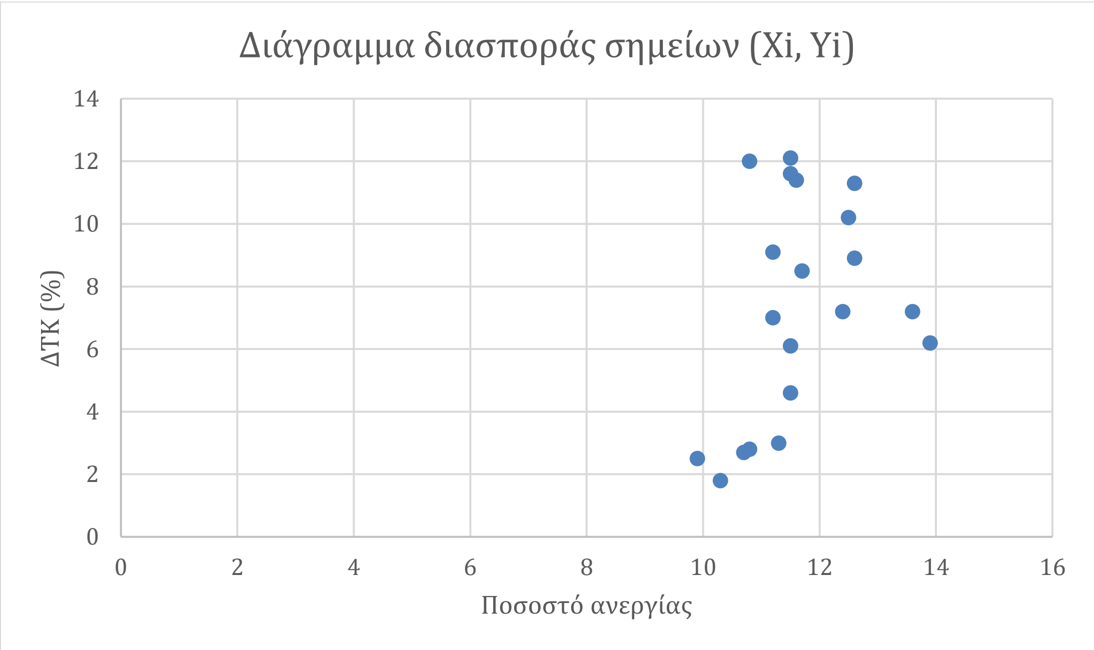
Συντελεστής μεταβλητότητας για το Δείκτη Τιμών Καταναλωτή (ΔΤΚ)

$$\mathrm{CV_y} = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{3{,}52}{7{,}31} = 0{,}4815 \text{ ή } 48{,}15\%$$

Από την σύγκριση των παραπάνω συντελεστών προκύπτει ότι $\mathrm{CV_x} < \mathrm{CV_y}$ κι ως εκ τούτου μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το δείγμα για το ποσοστό ανεργίας είναι πιο ομοιογενές σε σχέση με το αντίστοιχο δείγμα των μεταβολών του ΔΤΚ, συνεπώς πιο αξιόπιστο.

Υποερώτημα Γ

Από τα ζεύγη τιμών (x_i, y_i) του αρχικού πίνακα που μας δόθηκε προέκυψε μέσω Excel το ακόλουθο διάγραμμα διασποράς



Υποερώτημα Δ

Από το παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε μια σχετική «συσπείρωση» των σημείων (x_i, y_i) γύρω από μια αύξουσα ευθεία, γεγονός που δείχνει ότι υπάρχει θετική συσχέτιση των 2 μεταβλητών X και Y, δηλαδή όσο αυξάνεται (ή μειώνεται) το ποσοστό ανεργίας τόσο αυξάνεται (ή μειώνεται αντίστοιχα) ο ΔΤΚ. Παρόλα αυτά, η «συσπείρωση» των σημείων δεν είναι ιδιαίτερα έντονη και ως εκ τούτου δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα 2 μεγέθη έχουν έντονη συσχέτιση τελικά.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Υποερώτημα Α

Έχουμε τον ακόλουθο πίνακα διπλής εισόδου, στον οποίο κάνουμε τις αθροίσεις οριζόντια και κάθετα

	ΠΕ **Π**	ΔΕ **Δ**	Σύνολο
Υψηλό **Υ**	49	10	59
Μέτριο **Μ**	16	38	54
Χαμηλό **Χ**	5	52	57
Σύνολο	70	100	170

Ορίζουμε τα ακόλουθα ενδεχόμενα
Υ : Το τυχαία επιλεγμένο άτομο να έχει υψηλό επίπεδο γνώσης αγγλικών
Μ : Το τυχαία επιλεγμένο άτομο να έχει μέτριο επίπεδο γνώσης αγγλικών
Χ : Το τυχαία επιλεγμένο άτομο να έχει χαμηλό επίπεδο γνώσης αγγλικών
Π : Το τυχαία επιλεγμένο άτομο να έχει Πανεπιστημιακή εκπαίδευση
Δ : Το τυχαία επιλεγμένο άτομο να έχει Δευτεροβάθμια εκπαίδευση

i. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η

$$P(\mathrm{Y} \cap \Delta) = \frac{N(\mathrm{Y} \cap \Delta)}{N(S)} = \frac{10}{170} = 0{,}0588 \text{ ή } 5{,}88\%$$

ii. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η

$$P(\mathrm{X} \cup \Pi) = P(\mathrm{X}) + P(\Pi) - P(\mathrm{X} \cap \Pi) = \frac{N(\mathrm{X})}{N(S)} + \frac{N(\Pi)}{N(S)} - \frac{N(\mathrm{X} \cap \Pi)}{N(S)} =$$

$$= \frac{57}{170} + \frac{70}{170} - \frac{5}{170} = \frac{122}{170} = 0{,}7176 \text{ ή } 71{,}76\%$$

iii. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η

$$P(\Pi|X)=\frac{P(\Pi\cap X)}{P(X)}=\frac{\frac{N(\Pi\cap X)}{N(S)}}{\frac{N(X)}{N(S)}}=\frac{\frac{5}{170}}{\frac{57}{170}}=\frac{5\cdot 170}{57\cdot 170}=\frac{5}{57}=0{,}0877 \text{ ή } 8{,}77\%$$

iv. Για να ελέγξουμε αν τα ενδεχόμενα Μ (μέτριο επίπεδο γνώσης αγγλικών) και Δ (να έχει δευτεροβάθμια εκπαίδευση) είναι ανεξάρτητα, θα ελέγξουμε κατά πόσο ισχύει

$$P(M)\cdot P(\Delta)=P(M\cap\Delta)$$

Έτσι έχουμε

$$P(M)\cdot P(\Delta)=\frac{N(M)}{N(S)}\cdot\frac{N(\Delta)}{N(S)}=\frac{54}{170}\cdot\frac{100}{170}=\frac{5400}{28900}=0{,}1868$$

Το δεύτερο μέλος μας δίνει

$$P(M\cap\Delta)=\frac{N(M\cap\Delta)}{N(S)}=\frac{38}{170}=0{,}2235$$

Καταλήξαμε ότι $P(M)\cdot P(\Delta)\neq P(M\cap\Delta)$ κι αυτό σημαίνει ότι τα ενδεχόμενα Μ και Δ **είναι εξαρτημένα**, συνεπώς ο ισχυρισμός του Δημάρχου δεν ευσταθεί.

Υποερώτημα Β

Ορίζουμε τα ακόλουθα ενδεχόμενα :

Λ : Το πιστοποιητικό που εκδίδεται να περιέχει λάθη

Σ : Το πιστοποιητικό που εκδίδεται να μην περιέχει λάθη

Ε : Ο έλεγχος στην νέα θέση εργασίας αποφαίνεται ότι υπάρχει λάθος

Ε’ : Ο έλεγχος στην νέα θέση εργασίας αποφαίνεται ότι δεν υπάρχει λάθος

Μας έχουν δοθεί από την εκφώνηση τα ακόλουθα δεδομένα

$P(\Lambda)=0{,}01$

Όμως, τα ενδεχόμενα Λ και Σ είναι αντίθετα μεταξύ τους συνεπώς θα έχουμε και

$P(\Sigma)=1-P(\Lambda)=1-0{,}01=0{,}99$

Επιπλέον, δίνονται

$P(E|\Lambda)=0{,}95$

$P(E|\Sigma)=0{,}001$

i.
Από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας έχουμε
$\mathrm{P}(\mathrm{E}) = \mathrm{P}(\Lambda) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{E}|\Lambda) + \mathrm{P}(\Sigma) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{E}|\Sigma) =$
$= 0{,}01 \cdot 0{,}95 + 0{,}99 \cdot 0{,}001 = 0{,}0095 + 0{,}00099 = 0{,}01049$ ή $1{,}049\%$
Η πιθανότητα ο έλεγχος στην νέα θέση εργασίας να αποφανθεί ότι υπάρχει λάθος
Άρα για την ζητούμενη πιθανότητα ότι ο έλεγχος θα δείξει ότι δεν υπάρχει λάθος θα έχουμε
$\mathrm{P}(\mathrm{E}') = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{E}) = 1 - 0{,}01049 = 0{,}98951$ ή $98{,}951\%$

ii. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{K})$
Από τον τύπο του Bayes έχουμε τα ακόλουθα
$$\mathrm{P}(\Sigma|\mathrm{E}) = \frac{\mathrm{P}(\Sigma) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{E}|\Sigma)}{\mathrm{P}(\mathrm{E})} = \frac{0{,}99 \cdot 0{,}001}{0{,}01049} = \frac{0{,}00099}{0{,}01049} = 0{,}0944 \text{ ή } 9{,}44\%$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Υποερώτημα Α

i. Βρίσκουμε τους διαφορετικούς τρόπους για να συμπληρωθούν οι 6 μετοχές υψηλής κεφαλαιοποίησης από τις 11 διαθέσιμες
$$\binom{11}{6} = \frac{11!}{6! \cdot (11-6)!} = \frac{11!}{6! \cdot 5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} =$$
$$= \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{55.440}{120} = \mathbf{462\ διαφορετικούς\ τρόπους}$$
Βρίσκουμε τους διαφορετικούς τρόπους για να συμπληρωθούν οι 3 μετοχές μεσαίας κεφαλαιοποίησης από τις 16 διαθέσιμες
$$\binom{16}{3} = \frac{16!}{3! \cdot (16-3)!} = \frac{16!}{3! \cdot 13!} =$$
$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13} =$$
$$= \frac{14 \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{3.360}{6} = \mathbf{560\ διαφορετικούς\ τρόπους}$$
Από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι το χαρτοφυλάκιο μπορεί να σχηματιστεί με $462 \cdot 560 = \mathbf{258.720\ διαφορετικούς\ τρόπους}$

ii. Εφόσον θέλουμε τουλάχιστον 7 μετοχές μεσαίας κεφαλαιοποίησης, αυτό σημαίνει ότι το χαρτοφυλάκιο μπορεί να συμπεριλαμβάνει είτε 7 μετοχές μεσαίας (και 2 υψηλής) είτε 8 μετοχές μεσαίας (και 1 υψηλής) είτε 9 μεσαίας (και καμία υψηλής κεφαλαιοποίησης)

Α. Αν περιέχει 7 μετοχές μεσαίας (επομένως και 2 υψηλής)
Βρίσκουμε τους διαφορετικούς τρόπους για να συμπληρωθούν οι 7 θέσεις μετοχών μεσαίας κεφαλαιοποίησης από τις 16 διαθέσιμες

$$\binom{16}{7} = \frac{16!}{7! \cdot (16-7)!} = \frac{16!}{7! \cdot 9!} =$$
$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} =$$
$$= \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{57.657.600}{5.040} =$$
$$= \mathbf{11.440\ διαφορετικούς\ τρόπους}$$

Βρίσκουμε τους διαφορετικούς τρόπους για να συμπληρωθούν οι 2 θέσεις των μετοχών υψηλής κεφαλαιοποίησης από τις 11 διαθέσιμες

$$\binom{11}{2} = \frac{11!}{2! \cdot (11-2)!} = \frac{11!}{2! \cdot 9!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} =$$
$$= \frac{10 \cdot 11}{1 \cdot 2} = \frac{110}{2} = \mathbf{55\ διαφορετικούς\ τρόπους}$$

Από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι το χαρτοφυλάκιο μπορεί να σχηματιστεί με $11440 \cdot 55 = \mathbf{629.200\ διαφορετικούς\ τρόπους}$

Β. Αν περιέχει 8 μετοχές μεσαίας (επομένως και 1 υψηλής)
Βρίσκουμε τους διαφορετικούς τρόπους για να συμπληρωθούν οι 8 θέσεις μετοχών μεσαίας κεφαλαιοποίησης από τις 16 διαθέσιμες

$$\binom{16}{8} = \frac{16!}{8! \cdot (16-8)!} = \frac{16!}{8! \cdot 8!} =$$
$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} =$$
$$= \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{518.918.400}{40.320} =$$
$$= \mathbf{12.870\ διαφορετικούς\ τρόπους}$$

Βρίσκουμε τους διαφορετικούς τρόπους για να συμπληρωθεί η 1 θέση των μετοχών υψηλής κεφαλαιοποίησης από τις 11 διαθέσιμες

$$\binom{11}{1} = \frac{11!}{1! \cdot (11-1)!} = \frac{11!}{1! \cdot 10!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} =$$
$$= \frac{11}{1} = \mathbf{11\ διαφορετικούς\ τρόπους}$$

Από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι το χαρτοφυλάκιο μπορεί να σχηματιστεί με $12870 \cdot 11 = \mathbf{141.570\ διαφορετικούς\ τρόπους}$

Γ. Αν περιέχει 9 μετοχές μεσαίας (επομένως και καμία μετοχή υψηλής)
Βρίσκουμε τους διαφορετικούς τρόπους για να συμπληρωθούν οι 9 θέσεις μετοχών μεσαίας κεφαλαιοποίησης από τις 16 διαθέσιμες

$$\binom{16}{9} = \frac{16!}{9! \cdot (16-9)!} = \frac{16!}{9! \cdot 7!} =$$
$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} =$$
$$= \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{57.657.600}{5.040} =$$
$$= \mathbf{11.440\ διαφορετικούς\ τρόπους}$$

Άρα το χαρτοφυλάκιο που θα περιέχει τουλάχιστον 7 μετοχές μεσαίας κεφαλαιοποίησης μπορεί να σχηματιστεί με

$$\mathbf{629.200 + 141.570 + 11.440 = 782.210\ διαφορετικούς\ τρόπους}$$

iii.

Α. Αν η υψηλή κεφαλαιοποίηση είναι συνυφασμένη με χαμηλό κίνδυνο
Αν το χαρτοφυλάκιο διαμορφωθεί όπως στο υποερώτημα (i), δηλαδή αποτελείται από 6 μετοχές υψηλής κεφαλαιοποίησης (χαμηλού κινδύνου) και 3 μετοχές χαμηλής κεφαλαιοποίησης (υψηλού κινδύνου) τότε το πλήθος των μετοχών του χαρτοφυλακίου που είναι εκτεθειμένες σε υψηλό κίνδυνο είναι 3.

Αν το χαρτοφυλάκιο διαμορφωθεί όπως στο υποερώτημα (ii), θα αποτελείται
Είτε από 2 μετοχές υψηλής κεφαλαιοποίησης (χαμηλού κινδύνου) και 7 μετοχές χαμηλής κεφαλαιοποίησης (υψηλού κινδύνου), με πλήθος εκτεθειμένων μετοχών σε υψηλό κίνδυνο 7.
Είτε από 1 μετοχές υψηλής κεφαλαιοποίησης (χαμηλού κινδύνου) και 8 μετοχές χαμηλής κεφαλαιοποίησης (υψηλού κινδύνου), με πλήθος εκτεθειμένων μετοχών σε υψηλό κίνδυνο 8.
Είτε από 0 μετοχές υψηλής κεφαλαιοποίησης (χαμηλού κινδύνου) και 9 μετοχές χαμηλής κεφαλαιοποίησης (υψηλού κινδύνου), με πλήθος εκτεθειμένων μετοχών σε υψηλό κίνδυνο 9.

Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση, όταν το χαρτοφυλάκιο διαμορφώνεται όπως στο υποερώτημα (ii) είναι περισσότερο επισφαλές.

Β. Αν η υψηλή κεφαλαιοποίηση είναι συνυφασμένη με χαμηλό κίνδυνο
Αν το χαρτοφυλάκιο διαμορφωθεί όπως στο υποερώτημα (i), θα έχουμε 6 μετοχές υψηλού κινδύνου και 3 μετοχές χαμηλού κινδύνου.

Αν το χαρτοφυλάκιο διαμορφωθεί όπως στο υποερώτημα (ii), θα αποτελείται
Είτε από 2 μετοχές υψηλού κινδύνου και 7 μετοχές χαμηλού κινδύνου με ποσοστό εκτεθειμένων μετοχών σε υψηλό κίνδυνο
Είτε από 1 μετοχή υψηλού κινδύνου και 8 μετοχές χαμηλού κινδύνου, με ποσοστό εκτεθειμένων μετοχών σε υψηλό κίνδυνο
Είτε από 0 μετοχές υψηλού κινδύνου και 9 μετοχές χαμηλού κινδύνου, με ποσοστό εκτεθειμένων μετοχών σε υψηλό κίνδυνο

Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση, το χαρτοφυλάκιο που διαμορφώνεται όπως στο υποερώτημα (ii) είναι ασφαλέστερο

Υποερώτημα Β

i. Βρίσκουμε το πλήθος των διαφορετικών 5μελών ομάδων που μπορούν να σχηματιστούν από τους διαθέσιμους 25 αναλυτές

$$\binom{25}{5} = \frac{25!}{5! \cdot (25-5)!} = \frac{25!}{5! \cdot 20!} = \frac{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{6.375.600}{120} =$$
$$= \mathbf{53.130\ διαφορετικές\ 5αδες}$$

ii. Μετά τον έλεγχο των πτυχίων η τράπεζα έχει να επιλέξει από 10 διαθέσιμους αναλυτές με γνώσεις μαθηματικών και 15 αναλυτές χωρίς γνώσεις μαθηματικών
Εφόσον θέλουμε τουλάχιστον 4 άτομα με γνώσεις μαθηματικών, αυτό σημαίνει ότι μια 5μελής ομάδα μπορεί να συμπεριλαμβάνει είτε 4 άτομα με γνώσεις μαθηματικών (και 1 χωρίς γνώση μαθηματικών), είτε 5 άτομα με γνώσεις μαθηματικών (και κανένα χωρίς γνώση μαθηματικών)

Δ Διομήδη Κομνηνού 28, Νέο Ηράκλειο :: Τ 210 5711484, 6970 401981 :: Ε grammateia@eclass4u.gr
spyros.eclass4u@gmail.com :: W eclass4u

Α. Αν περιέχει 4 αναλυτές με γνώσεις μαθηματικών (επομένως και 1 αναλυτή χωρίς γνώσεις μαθηματικών)

Βρίσκουμε τους διαφορετικούς τρόπους για να συμπληρωθούν οι 4 θέσεις των αναλυτών με γνώσεις μαθηματικών από τους 10 διαθέσιμους

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot (10-4)!} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} =$$

$$= \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5040}{24} = 210 \text{ διαφορετικούς τρόπους}$$

Βρίσκουμε τους διαφορετικούς τρόπους για να συμπληρωθεί η 1 θέση αναλυτή χωρίς γνώσεις μαθηματικών από τους 15 διαθέσιμους

$$\binom{15}{1} = \frac{15!}{1! \cdot (15-1)!} = \frac{15!}{1! \cdot 14!} = \frac{15}{1} = 15 \text{ διαφορετικούς τρόπους}$$

Από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι η ομάδα μπορεί να σχηματιστεί με $210 \cdot 15 = \mathbf{3.150}$ **διαφορετικούς τρόπους**

Β. Αν περιέχει 5 αναλυτές με γνώσεις μαθηματικών (επομένως και κανέναν αναλυτή χωρίς γνώσεις μαθηματικών)

Βρίσκουμε τους διαφορετικούς τρόπους για να συμπληρωθούν οι 5 θέσεις των αναλυτών με γνώσεις μαθηματικών από τους 10 διαθέσιμους

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{10! \cdot (10-5)!} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} =$$

$$= \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{30.240}{120} = \mathbf{252 \text{ διαφορετικούς τρόπους}}$$

Άρα η 5μελής ομάδα που θα περιέχει τουλάχιστον 4 αναλυτές με γνώσεις μαθηματικών μπορεί να σχηματιστεί με

$$\mathbf{3.150 + 252 = 3.402 \text{ διαφορετικούς τρόπους}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Ορίζουμε μεταβλητή Χ : Ο χρόνος αναμονής των πολιτών σε μια δημόσια υπηρεσία με $\mathbf{X \sim N(\mu = 30, \sigma = 8)}$

Υποερώτημα Α

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(X \le 24) = P\left(\frac{X-30}{8} \le \frac{24-30}{8}\right) = P(Z \le -0{,}75) = 0{,}2266 \text{ ή } 22{,}66\%$$

Υποερώτημα Β

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$P(26 \le X \le 38) = P(X \le 38) - P(X \le 26) =$

$= P\left(\frac{X-30}{8} \le \frac{38-30}{8}\right) - P\left(\frac{X-30}{8} \le \frac{26-30}{8}\right) = P(Z \le 1) - P(Z \le -0{,}5) =$

$= 0{,}8413 - 0{,}3085 = 0{,}5328 \text{ ή } 53{,}28\%$

Υποερώτημα Γ

Έστω Π ο ζητούμενος χρόνος αναμονής ενός πολίτη, πάνω από τον οποίο θα αποζημιώνεται. Τότε, θα ισχύει

$P(x > \Pi) = 0{,}01 \Leftrightarrow 1 - P(x \le \Pi) = 0{,}01 \Leftrightarrow -P(x \le k) = -0{,}99 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(x \le \Pi) = 0{,}99 \Leftrightarrow P\left(\frac{x-30}{8} \le \frac{\Pi-30}{8}\right) = 0{,}99 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(Z \le \frac{\Pi-30}{8}\right) = 0{,}99 \Leftrightarrow P\left(Z \le \frac{\Pi-30}{8}\right) = P(Z \le 2{,}33)$

Θα πρέπει να ισχύει, λοιπόν,

$$\frac{\Pi-30}{8} = 2{,}33 \Leftrightarrow \Pi - 30 = 2{,}33 \cdot 8 \Leftrightarrow \Pi - 30 = 18{,}64 \Leftrightarrow \Pi = 48{,}64 \text{ λεπτά}$$

Επομένως ο χρόνος αναμονής ενός πολίτη, πάνω από τον οποίο θα αποζημιώνεται, είναι τα 48,64 λεπτά

Υποερώτημα Δ

Για την κανονική κατανομή η πιθανότητα η μεταβλητή να πάρει μια συγκεκριμένη τιμή από τις άπειρες διαφορετικές που είναι δυνατόν να πάρει είναι ίση με μηδέν δηλαδή στην περίπτωσή μας

$$P(X = 28) = 0 \text{ ή } 0\%$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Υποερώτημα Α

Ορίζουμε μεταβλητή Χ : Πλήθος αιτήσεων που διεκπεραιώνονται αυθημερόν
Επειδή οι αιτήσεις είναι 40 θα έχουμε αντίστοιχα $\mathbf{n = 40}$ και πιθανότητα επιτυχίας (η τυχαία επιλεγμένη αίτηση να διεκπεραιωθεί) $\mathbf{p = 0,9}$ όπως μας δόθηκε από την εκφώνηση.
Άρα

$$\mathbf{X \sim b(n = 40, p = 0,9)}$$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η
$P(X \leq 38) = 1 - P(X > 38) = 1 - [P(X = 39) + P(X = 40)]$

Υπολογίζουμε τις ακόλουθες πιθανότητες

$$P(X = 39) = \frac{40!}{39! \cdot (40 - 39)!} \cdot 0{,}9^{39} \cdot (1 - 0{,}9)^{40-39} =$$
$$= \frac{40!}{39! \cdot 1!} \cdot 0{,}9^{39} \cdot 0{,}1^{1} = \frac{40}{1} \cdot 0{,}0164 \cdot 0{,}1 = 0{,}0656$$

$$P(X = 40) = \frac{40!}{40! \cdot (40 - 40)!} \cdot 0{,}9^{40} \cdot (1 - 0{,}9)^{40-40} =$$
$$= \frac{40!}{40! \cdot 0!} \cdot 0{,}9^{40} \cdot 0{,}1^{0} = \frac{1}{1 \cdot 1} \cdot 0{,}0148 \cdot 1 = 0{,}0148$$

Άρα η αρχική ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με
$P(X \leq 38) = 1 - (0{,}0656 + 0{,}0148) = 1 - 0{,}0804 = 0{,}9196$ ή $91{,}96\%$

Υποερώτημα Β

Ορίζουμε μεταβλητή Υ : Πλήθος αιτήσεων που **δεν** διεκπεραιώνονται αυθημερόν
Πλέον έχουμε $n = 30$ αιτήσεις και πιθανότητα επιτυχίας (η τυχαία επιλεγμένη αίτηση να **μην** διεκπεραιωθεί αυθημερόν) είναι ίση με $1 - 0{,}9 = 0{,}1$ άρα για το διωνυμικό πρόβλημα θα έχουμε

$$\mathbf{Y \sim b(n = 30, p = 0,1)}$$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η
$P(2 \le Y \le 4) = P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4)$
Υπολογίζουμε τις ακόλουθες πιθανότητες

$$P(Y = 2) = \frac{30!}{2! \cdot (30-2)!} \cdot 0{,}1^2 \cdot (1 - 0{,}1)^{30-2} =$$
$$= \frac{30!}{2! \cdot 28!} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{28} = \frac{29 \cdot 30}{1 \cdot 2} \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}0523 = 0{,}2275$$

$$P(Y = 3) = \frac{30!}{3! \cdot (30-3)!} \cdot 0{,}1^3 \cdot (1 - 0{,}1)^{30-3} =$$
$$= \frac{30!}{3! \cdot 27!} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^{27} = \frac{28 \cdot 29 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0{,}001 \cdot 0{,}0581 = 0{,}2359$$

$$P(Y = 4) = \frac{30!}{4! \cdot (30-4)!} \cdot 0{,}1^4 \cdot (1 - 0{,}1)^{30-4} =$$
$$= \frac{30!}{4! \cdot 26!} \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^{26} = \frac{27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 0{,}0001 \cdot 0{,}0646 = 0{,}1770$$

Άρα η αρχική ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με
$P(2 \le Y \le 4) = 0{,}2275 + 0{,}2359 + 0{,}1770 = 0{,}6404$ ή $64{,}04\%$

Υποερώτημα Γ

Πλέον έχουμε $n = 60$ αιτήσεις, άρα για το διωνυμικό πρόβλημα

$$\mathbf{Y \sim b(n = 60, p = 0{,}1)}$$

Για την αναμενόμενη τιμή έχουμε $E = n \cdot p = 60 \cdot 0{,}1 = 6$ αιτήσεις αναμένεται να μην έχουν διεκπεραιωθεί
Για την διακύμανση έχουμε
$S^2 = n \cdot p \cdot q = 60 \cdot 0{,}1 \cdot (1 - 0{,}1) = 60 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 5{,}4$
Συνεπώς για την τυπική απόκλιση
$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{5{,}4} = 2{,}32$ αιτήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 6

Υποερώτημα Α

Ορίζουμε μεταβλητή

Χ : Το πλήθος των ατυχημάτων με αυτοκίνητο που γίνονται στην συγκεκριμένη μικρή πόλη της Ελλάδας

Με $X \sim P\left(\lambda = 48 \frac{\text{ατυχήματα}}{\text{έτος}}\right)$

Για την πιθανότητα που μας ζητείται θα πρέπει να υπολογίσουμε την νέα τιμή του λ

Σε 12 μήνες (1 έτος) γίνονται 48 ατυχήματα

Σε 1 μήνα γίνονται λ ατυχήματα

$$\lambda = 48 \cdot \frac{1}{12} \Leftrightarrow \lambda = 4 \frac{\text{ατυχήματα}}{\text{μήνα}}$$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) =$$
$$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)]$$

Υπολογίζουμε τις πιθανότητες

$$P(X = 0) = \frac{e^{-4} \cdot 4^0}{0!} = e^{-4} = 0{,}0183$$

$$P(X = 1) = \frac{e^{-4} \cdot 4^1}{1!} = e^{-4} \cdot 4 = 0{,}0183 \cdot 4 = 0{,}0732$$

$$P(X = 2) = \frac{e^{-4} \cdot 4^2}{2!} = \frac{0{,}0183 \cdot 16}{1 \cdot 2} = 0{,}1464$$

$$P(X = 3) = \frac{e^{-4} \cdot 4^3}{3!} = \frac{0{,}0183 \cdot 64}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 0{,}1952$$

$$P(X = 4) = \frac{e^{-4} \cdot 4^4}{4!} = \frac{0{,}0183 \cdot 256}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 0{,}1952$$

Τελικά η πιθανότητα που ζητήθηκε από την άσκηση είναι ίση με

$$P(X > 4) = 1 - (0{,}0183 + 0{,}0732 + 0{,}1464 + 0{,}1952 + 0{,}1952) =$$
$$= 1 - 0{,}6283 = 0{,}3717 \text{ ή } 37{,}17\%$$

Υποερώτημα Β

Η κατανομή Poisson μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την μελέτη του πλήθους ατυχημάτων δεδομένου ότι πρόκειται για την μελέτη ανεξάρτητων μεταξύ τους γεγονότων (τα ατυχήματα με αυτοκίνητο) που συμβαίνουν με γνωστό μέσο ρυθμό (το μέσο ετήσιο πλήθος ατυχημάτων) σε καθορισμένα χρονικά διαστήματα.