Ποσοτικές Μέθοδοι

ΔΗΔ22

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ
«ΠΡΩΤΗΣ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ»

«ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2023-2024»

[23-03-24]

ECLASS4U ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:ΣΠΥΡΟΣ ΒΛΑΧΟΠΟΥΛΟΣ

Δ Διομήδη Κομνηνού 28, Νέο Ηράκλειο :: **Τ** 210 5711484, 6970 401981 :: **E** grammateia@eclass4u.gr

spyros.eclass4u@gmail.com :: **W** eclass4u

ΑΣΚΗΣΗ 1

Υποερώτημα Α

i)

$$f_{(x)}=\frac{2x^2+5}{\ln(x+3)}$$

Πρέπει $x+3>0 \Leftrightarrow x>-3\ (1)$

Επιπλέον, θα πρέπει $\ln(x+3)\neq 0$ διότι είναι παρονομαστής

Όμως, $\ln(x+3)=0 \Leftrightarrow \ln(x+3)=\ln1 \Leftrightarrow x+3=1 \Leftrightarrow x=1-3 \Leftrightarrow x=-2$

Συνεπώς, λόγω του περιορισμού για τον παρονομαστή θα πρέπει $x\neq -2\ (2)$

Συναληθεύοντας τις σχέσεις (1) και (2) καταλήγουμε ότι πρέπει $x\in(-3,-2)\cup(-2,+\infty)$ επομένως το πεδίο ορισμού της $f_{(x)}$ είναι το $A=(-3,-2)\cup(-2,+\infty)$

Για την παράγωγο της παραπάνω συνάρτησης έχουμε :

$$f'_{(x)}=\left[\frac{2x^2+5}{\ln(x+3)}\right]'=\frac{(2x^2+5)'\cdot\ln(x+3)-(2x^2+5)\cdot[\ln(x+3)]'}{[\ln(x+3)]^2}=$$

$$=\frac{[(2x^2)'+(5)']\cdot\ln(x+3)-(2x^2+5)\cdot\dfrac{1}{x+3}\cdot(x+3)'}{[\ln(x+3)]^2}=$$

$$=\frac{(2\cdot 2x+0)\cdot\ln(x+3)-(2x^2+5)\cdot\dfrac{1}{x+3}\cdot(1+0)}{[\ln(x+3)]^2}=$$

$$=\frac{4x\cdot\ln(x+3)-\dfrac{2x^2+5}{x+3}}{[\ln(x+3)]^2}=\frac{\dfrac{4x\ln(x+3)(x+3)}{x+3}-\dfrac{2x^2+5}{x+3}}{[\ln(x+3)]^2}=$$

$$=\frac{\dfrac{4x\cdot\ln(x+3)\cdot(x+3)-(2x^2+5)}{x+3}}{[\ln(x+3)]^2}=\frac{4x\cdot\ln(x+3)\cdot(x+3)-2x^2-5}{(x+3)\cdot[\ln(x+3)]^2}$$

ii)

$$g_{(x)}=3\sqrt{2+\frac{5}{x}}$$

Πρέπει $x\neq 0\ (1)$

Επιπλέον, για το υπόριζο πρέπει

$$2+\frac{5}{x}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x}+\frac{5}{x}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+5}{x}\geq 0$$

Για τον αριθμητή έχουμε

$$2x+5>0 \Leftrightarrow 2x>-5 \Leftrightarrow \frac{2x}{2}>\frac{-5}{2} \Leftrightarrow x>-2{,}5$$

Και

$$2x+5<0 \Leftrightarrow 2x<-5 \Leftrightarrow \frac{2x}{2}<\frac{-5}{2} \Leftrightarrow x<-2{,}5$$

Για το πρόσημο του παραπάνω κλάσματος δημιουργούμε τον ακόλουθο πίνακα

x	$-\infty$	$-2{,}5$	0	$+\infty$
x	-		-	+
$2x+5$	-	O	+	+
$\frac{2x+5}{x}$	+	O	-	+

Συνεπώς για το υπόριζο έχουμε $2+\frac{5}{x}\geq 0$ για $x\in(-\infty,-2{,}5]\cup(0,+\infty)$ επομένως το πεδίο ορισμού της $g_{(x)}$ είναι το

$A=(-\infty,-2{,}5]\cup(0,+\infty)$

Για την παράγωγο της παραπάνω συνάρτησης έχουμε :

$$g'_{(x)}=\left(3\sqrt{2+\frac{5}{x}}\right)'=3\cdot\left(\sqrt{2+\frac{5}{x}}\right)'=3\cdot\frac{1}{2\sqrt{2+\frac{5}{x}}}\cdot\left(2+\frac{5}{x}\right)'=$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{2+\frac{5}{x}}}\cdot\left[(2)'+\left(\frac{5}{x}\right)'\right]=\frac{3}{2\sqrt{2+\frac{5}{x}}}\cdot\left[0+\frac{(5)'\cdot x-5\cdot(x)'}{x^2}\right]=$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{2+\frac{5}{x}}}\cdot\frac{0-5\cdot 1}{x^2}=-\frac{15}{2\cdot x^2\cdot\sqrt{2+\frac{5}{x}}}$$

iii)

$h_{(x)}=x\cdot e^{x^2-3x+7}$

Δεν υπάρχει περιορισμός συνεπώς για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης έχουμε

$A=R$

Για την παράγωγο της παραπάνω συνάρτησης έχουμε :

$$h'_{(x)}=\left(x\cdot e^{x^2-3x+7}\right)'=(x)'\cdot e^{x^2-3x+7}+x\cdot\left(e^{x^2-3x+7}\right)'=$$

$$=1\cdot e^{x^2-3x+7}+x\cdot e^{x^2-3x+7}\cdot(x^2-3x+7)'=$$

$$=e^{x^2-3x+7}+x\cdot e^{x^2-3x+7}\cdot[(x^2)'-(3x)'+(7)']=$$

$$=e^{x^2-3x+7}+x\cdot e^{x^2-3x+7}\cdot(2x-3\cdot 1+0)=$$

$$=e^{x^2-3x+7}+x\cdot e^{x^2-3x+7}\cdot(2x-3)=$$

$$=e^{x^2-3x+7}\cdot[1+x(2x-3)]=e^{x^2-3x+7}\cdot(2x^2-3x+1)$$

Υποερώτημα Β

$4x^3-12x^2-9x+27=0 \Leftrightarrow 4x^2\cdot(x-3)-9\cdot(x-3)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-3)\cdot(4x^2-9)=0 \Leftrightarrow (x-3)\cdot[(2x)^2-3^2]=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-3)\cdot(2x+3)\cdot(2x-3)=0$

Συνεπώς

$x-3=0 \Leftrightarrow x=3$

ή

$$2x+3=0 \Leftrightarrow 2x=-3 \Leftrightarrow \frac{2x}{2}=\frac{-3}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$$

ή

$$2x-3=0 \Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow \frac{2x}{2}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

Επομένως η εξίσωση έχει τις ακόλουθες 3 ρίζες

$$x_1=3, x_2=-\frac{3}{2} \text{ και } x_3=\frac{3}{2}$$

Υποερώτημα Γ

i)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x^2+8x+15}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

ii)

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{x^3-x^2\cdot\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2})^2-2}{(\sqrt{2})^3-(\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{2}}=$$
$$=\frac{2-2}{(\sqrt{2})^3\cdot(\sqrt{2})^3}=\frac{0}{0}\ (\text{απροσδιόριστη μορφή})$$

Παραγοντοποιώντας αριθμητή και παρονομαστή έχουμε

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{x^3-x^2\cdot\sqrt{2}}=\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-(\sqrt{2})^2}{x^2\cdot(x-\sqrt{2})}=\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{x^2\cdot(x-\sqrt{2})}=$$
$$=\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x+\sqrt{2}}{x^2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

Υποερώτημα Δ

$$f_{(x)} = \begin{cases} x^2 + 4 \text{ για } x \leq 2 \\ 4x \text{ για } x > 2 \end{cases}$$

Η $f_{(x)}$ είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 2)$ και $(2, +\infty)$ ως πολυωνυμική

Για να εξετάσουμε στο σημείο αλλαγής τύπου $x_0 = 2$ θα υπολογίσουμε τα πλευρικά όρια της συνάρτησης στο συγκεκριμένο σημείο

$\lim_{x\to 2^-} f_{(x)} = \lim_{x\to 2^-} (x^2 + 4) = 2^2 + 4 = 4 + 4 = 8$

$\lim_{x\to 2^+} f_{(x)} = \lim_{x\to 2^+} 4x = 4 \cdot 2 = 8$

Επιπλέον $f_{(2)} = 2^2 + 4 = 4 + 4 = 8$

Επειδή $\lim_{x\to 2^-} f_{(x)} = \lim_{x\to 2^+} f_{(x)} = f_{(2)}$ η συνάρτηση είναι συνεχής και στο $x_0 = 2$ συνεπώς η συνάρτηση είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της $A = R$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Υποερώτημα Α

i)

Για την ζητούμενη συνάρτηση προσφοράς γνωρίζουμε ότι είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων 0(0,0) και το σημείο ισορροπίας $(Q_1, P_1) = (10{,}5)$. Γνωρίζουμε 2 σημεία της ζητούμενης ευθείας συνεπώς θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο τύπο

$$Q = Q_1 - P_1 \cdot \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1} + \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1} \cdot P = 0 - 0 \cdot \frac{10 - 0}{5 - 0} + \frac{10 - 0}{5 - 0} \cdot P = 0 + \frac{10}{5} \cdot P \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q = 2P$$

Για την ζητούμενη συνάρτηση ζήτησης γνωρίζουμε ότι διέρχεται από το σημείο ισορροπίας $(Q_1, P_1) = (10{,}5)$. Η κλίση της ευθείας θα είναι σε απόλυτη τιμή με την κλίση της συνάρτησης προσφοράς, δηλαδή

$|\alpha| = 2 \Leftrightarrow \alpha = \pm 2$

κι επειδή η συνάρτηση ζήτησης είναι πάντα φθίνουσα η κλίση θα είναι αρνητική δηλαδή $\alpha = -2$. Τελικά, γνωρίζουμε την κλίση κι ένα σημείο της ευθείας, συνεπώς θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο τύπο

$Q = Q_1 + \alpha \cdot (P - P_1) \Leftrightarrow Q = 10 + (-2) \cdot (P - 5) \Leftrightarrow Q = 10 - 2P + 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Q = 20 - 2P$ η συνάρτηση ζήτησης

ii)
Για $\mathrm{P} = 6$ ν. μ. η προσφερόμενη ποσότητα θα είναι
$\mathrm{Q} = 2 \cdot 6 = 12$ μονάδες προϊόντος
Ενώ η αντίστοιχη ζητούμενη ποσότητα θα είναι
$\mathrm{Q} = 20 - 2 \cdot 6 = 20 - 12 = 8$ μονάδες προϊόντος
Επειδή η προσφερόμενη ποσότητα είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ζητούμενη, θα υπάρχει πλεόνασμα του αγαθού στην αγορά ίσο με
$12 - 8 = 4$ μονάδες προϊόντος

iii)
Για την νέα συνάρτηση ζήτησης γνωρίζουμε ότι έχει την ίδια κλίση $(\alpha = -2)$ κι ότι η σταθερά της θα είναι αυξημένη κατά 4 μονάδες. Συνεπώς, η εξίσωση της νέας συνάρτησης ζήτησης θα είναι
$\mathrm{Q} = (20 + 4) - 2\mathrm{P} \Leftrightarrow \mathrm{Q} = 24 - 2\mathrm{P}$
Στο νέο σημείο ισορροπίας θα ισχύουν $\mathrm{Q_d} = \mathrm{Q_s}$ και $\mathrm{P_d} = \mathrm{P_s}$
$\mathrm{Q_d} = \mathrm{Q_s} \Leftrightarrow 24 - 2\mathrm{P} = 2\mathrm{P} \Leftrightarrow -2\mathrm{P} - 2\mathrm{P} = -24 \Leftrightarrow -4\mathrm{P} = -24 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{-4\mathrm{P}}{-4} = \frac{-24}{-4} \Leftrightarrow \mathrm{P} = 6$ η νέα τιμή ισορροπίας

Αντικαθιστούμε στην συνάρτηση προσφοράς κι έχουμε
$\mathrm{Q} = 2 \cdot 6 = 12$ την νέα ποσότητα ισορροπίας
Τελικά, το νέο σημείο ισορροπίας θα είναι το $(\mathrm{P_{I\Sigma}}, \mathrm{Q_{I\Sigma}}) = (6{,}12)$

Για $\mathrm{P} = 6$ ν. μ. η προσφερόμενη ποσότητα θα είναι
$\mathrm{Q} = 2 \cdot 6 = 12$ μονάδες προϊόντος
Ενώ η αντίστοιχη ζητούμενη ποσότητα θα είναι
$\mathrm{Q} = 24 - 2 \cdot 6 = 24 - 12 = 12$ μονάδες προϊόντος
Δηλαδή αυτή τη φορά η προσφερόμενη ποσότητα ισούται με την ζητούμενη ποσότητα, συνεπώς δεν προκύπτει πλεόνασμα του αγαθού στην αγορά.

Υποερώτημα Β

Για την συνάρτηση $\mathrm{f_{(p)}} = \mathrm{p}^2 - \mathrm{p} - 2$ γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής στο $[0{,}3]$ ως πολυωνυμική κι επιπλέον έχουμε
$\mathrm{f_{(0)}} = 0^2 - 0 - 2 = -2$
$\mathrm{f_{(3)}} = 3^2 - 3 - 2 = 9 - 3 - 2 = 4$
Συνεπώς $\mathrm{f_{(0)}} \cdot \mathrm{f_{(3)}} = -2 \cdot 4 = -8 < 0$
Άρα για την συνάρτηση $\mathrm{f_{(p)}}$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα θα έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0{,}3)$, άρα και στο $[0{,}3]$.
Η συγκεκριμένη συνάρτηση δεν θα μπορούσε να είναι η συνάρτηση προσφοράς αφού παίρνει και αρνητικές τιμές στο διάστημα που ορίζεται, ενώ γνωρίζουμε ότι η προσφερόμενη ποσότητα παίρνει τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Υποερώτημα i

Έχουμε την συνάρτηση

$f_{(x)} = \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{8} - \frac{6x}{4} + 2$ με πεδίο ορισμού $A = R$

Για την πρώτη παράγωγο έχουμε

$$f'_{(x)} = \left(\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{8} - \frac{6x}{4} + 2\right)' = \left(\frac{x^3}{12}\right)' - \left(\frac{x^2}{8}\right)' - \left(\frac{6x}{4}\right)' + (2)' =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot (x^3)' - \frac{1}{8} \cdot (x^2)' - \frac{6}{4} \cdot (x)' + 0 = \frac{1}{12} \cdot 3 \cdot x^2 - \frac{1}{8} \cdot 2x - \frac{6}{4} \cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{6}{4} = \frac{1}{4} \cdot (x^2 - x - 6)$$

Για την δεύτερη παράγωγο έχουμε

$$f''_{(x)} = \left[\frac{1}{4} \cdot (x^2 - x - 6)\right]' = \frac{1}{4} \cdot (x^2 - x - 6)' = \frac{1}{4} \cdot [(x^2)' - (x)' - (6)'] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (2x - 1)$$

Για την τρίτη παράγωγο έχουμε

$$f'''_{(x)} = \left[\frac{1}{4} \cdot (2x - 1)\right]' = \frac{1}{4} \cdot (2x - 1)' = \frac{1}{4} \cdot [(2x)' - (1)'] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (2 \cdot 1 - 0) = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

Υποερώτημα ii

Για να βρούμε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης θα εφαρμόσουμε κριτήρια πρώτης και δεύτερης παραγώγου

Έχουμε υπολογίσει την

$$f'_{(x)} = \frac{1}{4} \cdot (x^2 - x - 6)$$

$$f'_{(x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot (x^2 - x - 6) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

Έχουμε τριώνυμο με $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = -6$

$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$

Υπάρχουν 2 πραγματικές άνισες ρίζες

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ πιθανό σημείο ακροτάτου}$$

$$x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \text{ πιθανό σημείο ακροτάτου}$$

Έχουμε υπολογίσει την

$$f''_{(x)} = \frac{1}{4} \cdot (2x - 1)$$

Αντικαθιστούμε τις ρίζες της πρώτης παραγώγου και έχουμε

1) Για $x_1 = 3$

$$f''_{(3)} = \frac{1}{4} \cdot (2 \cdot 3 - 1) = \frac{1}{4} \cdot 5 = \frac{5}{4} > 0$$

Άρα στο $x_1 = 3$ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το οποίο είναι ίσο με

$$f_{(3)} = \frac{3^3}{12} - \frac{3^2}{8} - \frac{6 \cdot 3}{4} + 2 = \frac{27}{12} - \frac{9}{8} - \frac{18}{4} + 2 = \frac{27 \cdot 2}{12 \cdot 2} - \frac{9 \cdot 3}{8 \cdot 3} - \frac{18 \cdot 6}{4 \cdot 6} + \frac{2 \cdot 24}{1 \cdot 24} =$$

$$= \frac{54}{24} - \frac{27}{24} - \frac{108}{24} + \frac{48}{24} = -\frac{33}{24}$$

2) Για $x_2 = -2$

$$f''_{(-2)} = \frac{1}{4} \cdot [2 \cdot (-2) - 1] = \frac{1}{4} \cdot (-4 - 1) = \frac{1}{4} \cdot (-5) = -\frac{5}{4} < 0$$

Άρα στο $x_2 = -2$ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το οποίο είναι ίσο με

$$f_{(-2)} = \frac{(-2)^3}{12} - \frac{(-2)^2}{8} - \frac{6 \cdot (-2)}{4} + 2 = -\frac{8}{12} - \frac{4}{8} + \frac{12}{4} + 2 =$$

$$= -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 3 + 2 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 5 = -\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 6} = -\frac{4}{6} - \frac{3}{6} + \frac{30}{6} = \frac{23}{6}$$

Υποερώτημα iii

Για τις πιθανές θέσεις σημείων καμπής βρίσκουμε τις ρίζες της δεύτερης παραγώγου

$$f''_{(x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot (2x - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = 0{,}5$ πιθανή θέση σημείου καμπής

$$f''_{(x)} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot (2x - 1) > 0 \Leftrightarrow 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x > 0{,}5$ (συνεπώς η $f''_{(x)}$ είναι θετική όταν $x > 0{,}5$)

Ομοίως

$$f''_{(x)} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot (2x - 1) < 0 \Leftrightarrow 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x < 0{,}5$ (συνεπώς η $f''_{(x)}$ είναι αρνητική όταν $x < 0{,}5$)

Διαπιστώσαμε, δηλαδή, ότι η $f''_{(x)}$ μηδενίζεται στο $x_0 = 0{,}5$ κι επιπλέον αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν, επομένως πράγματι υπάρχει σημείο καμπής
Η τιμή της συνάρτησης στο συγκεκριμένο σημείο είναι ίση με

$$f_{(0,5)} = \frac{0{,}5^3}{12} - \frac{0{,}5^2}{8} - \frac{6 \cdot 0{,}5}{4} + 2 = \frac{0{,}125}{12} - \frac{0{,}25}{8} - \frac{3}{4} + 2 =$$

$$= 0{,}010 - 0{,}031 - 0{,}75 + 2 = 1{,}229$$

Συνεπώς το σημείο καμπής της συνάρτησης $f_{(x)}$ είναι το $(0{,}5\ ,1{,}229\ )$

Υποερώτημα iv

Στο προηγούμενο υποερώτημα διαπιστώσαμε ότι

$f''_{(x)} > 0$ για $x\epsilon(0{,}5, +\infty)$ επομένως η $f_{(x)}$ είναι κυρτή σε αυτό το διάστημα

$f''_{(x)} < 0$ για $x\epsilon(-\infty, 0{,}5)$ επομένως η $f_{(x)}$ είναι κοίλη σε αυτό το διάστημα

Υποερώτημα v

Μέσω του Excel δημιουργήσαμε τον ακόλουθο πίνακα τιμών για τις συναρτήσεις $f_{(x)}, f'_{(x)}$ και $f''_{(x)}$ στο ζητούμενο διάστημα $[-4{,}4]$

Τιμή μεταβλητής x	$f_{(x)}$	$f'_{(x)}$	$f''_{(x)}$
-4	0,66667	3,5	-2,25
-3,5	2,14583	2,4375	-2
-3	3,125	1,5	-1,75
-2,5	3,66667	0,6875	-1,5
-2	3,83333	0	-1,25
-1,5	3,6875	-0,5625	-1
-1	3,29167	-1	-0,75
-0,5	2,70833	-1,3125	-0,5
0	2	-1,5	-0,25
0,5	1,22917	-1,5625	0
1	0,45833	-1,5	0,25
1,5	-0,25	-1,3125	0,5
2	-0,8333	-1	0,75
2,5	-1,2292	-0,5625	1
3	-1,375	0	1,25
3,5	-1,2083	0,6875	1,5
4	-0,6667	1,5	1,75

Η κοινή γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f_{(x)}, f'_{(x)}$ και $f''_{(x)}$, όπως προέκυψε από το Excel, είναι αυτή που ακολουθεί

Διαπιστώνεται ότι στα σημεία που μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος (-2 και 3) η συνάρτηση παρουσιάζει την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της αντίστοιχα, επιβεβαιώνοντας τα ευρήματα του υποερωτήματος ii, ενώ στο μοναδικό σημείο στο οποίο μηδενίζεται η δεύτερη παράγωγος $(0{,}5)$ η συνάρτηση αλλάζει την κυρτότητά της (από κυρτή γίνεται κοίλη), επιβεβαιώνοντας το συμπέρασμα του υποερωτήματος iii, στο οποίο προέκυψε ότι στο συγκεκριμένο σημείο έχουμε σημείο καμπής.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Υποερώτημα i

Αρχικά υπολογίζουμε την συνάρτηση εσόδων

$\mathrm{TR} = \mathrm{P} \cdot \mathrm{Q} = 10\mathrm{Q}$

Για την συνάρτηση κερδών έχουμε

$\Pi = \mathrm{TR} - \mathrm{TC} = 10\mathrm{Q} - (40 + \mathrm{Q} + 0{,}015\mathrm{Q}^2) = 10\mathrm{Q} - 40 - \mathrm{Q} - 0{,}015\mathrm{Q}^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Pi = -0{,}015\mathrm{Q}^2 + 9\mathrm{Q} - 40$

Για να βρούμε το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη θα εφαρμόσουμε κριτήρια πρώτης και δεύτερης παραγώγου

Κριτήριο 1ης παραγώγου

$\Pi' = (-0{,}015\mathrm{Q}^2 + 9\mathrm{Q} - 40)' = -0{,}015 \cdot 2\mathrm{Q} + 9 \cdot 1 - 40 = -0{,}03\mathrm{Q} + 9$

Οι πιθανές θέσεις ακροτάτων είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$\Pi' = 0 \Leftrightarrow -0{,}03\mathrm{Q} + 9 = 0 \Leftrightarrow -0{,}03\mathrm{Q} = -9 \Leftrightarrow \frac{-0{,}03\mathrm{Q}}{-0{,}03} = \frac{-9}{-0{,}03} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \mathrm{Q} = 300$ πιθανή θέση ακροτάτου

Κριτήριο 2ης παραγώγου

$\Pi'' = (-0{,}03\mathrm{Q} + 9)' = -0{,}03 \cdot 1 + 0 = -0{,}03$

$\Pi''_{(300)} = -0{,}03 < 0$

Άρα για $\mathrm{Q} = 300$ μονάδες προϊόντος η συνάρτηση κέρδους μεγιστοποιείται.

Υποερώτημα ii

Για την συνάρτηση οριακού κόστους έχουμε

$\mathrm{C}' = \mathrm{MC} = (40 + \mathrm{Q} + 0{,}015\mathrm{Q}^2)' = 0 + 1 + 0{,}015 \cdot 2\mathrm{Q} = 0{,}03\mathrm{Q} + 1$

Για την συνάρτηση μέσου κόστους έχουμε

$$\mathrm{AC} = \frac{\mathrm{TC}}{\mathrm{Q}} = \frac{40 + \mathrm{Q} + 0{,}015\mathrm{Q}^2}{\mathrm{Q}} = \frac{40}{\mathrm{Q}} + \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{Q}} + \frac{0{,}015\mathrm{Q}^2}{\mathrm{Q}} = \frac{40}{\mathrm{Q}} + 1 + 0{,}015\mathrm{Q}$$

Για $\mathrm{Q} = 3$

$$\mathrm{AC}_{(3)} = \frac{40}{3} + 1 + 0{,}015 \cdot 3 = 13{,}333 + 1 + 0{,}045 = 14{,}378$$

Για $\mathrm{Q} = 7$

$$\mathrm{AC}_{(7)} = \frac{40}{7} + 1 + 0{,}015 \cdot 7 = 5{,}714 + 1 + 0{,}105 = 6{,}819$$

Για $Q = 70$

$$AC_{(70)} = \frac{40}{70} + 1 + 0{,}015 \cdot 70 = 0{,}571 + 1 + 1{,}05 = 2{,}621$$

Για $Q = 200$

$$AC_{(200)} = \frac{40}{200} + 1 + 0{,}015 \cdot 200 = 0{,}2 + 1 + 3 = 4{,}2$$

Από τις παραπάνω τιμές δεν μπορούμε να βγάλουμε ακριβή συμπεράσματα για την μονοτονία της συνάρτησης μέσου κόστους, όμως υπάρχουν ενδείξεις ότι αρχικά θα είναι φθίνουσα και στην συνέχεια αύξουσα, αφού οι αρχικές τιμές της είναι όλο και μικρότερες ενώ στην τελευταία τιμή εντοπίζεται αύξηση.

Για να βρούμε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης μέσου κόστους AC θα εφαρμόσουμε κριτήρια πρώτης και δεύτερης παραγώγου

Κριτήριο 1ης παραγώγου

$$AC' = \left(\frac{40}{Q} + 1 + 0{,}015Q\right)' = \left(\frac{40}{Q}\right)' + (1)' + (0{,}015Q)' =$$
$$= \frac{(40)' \cdot Q - 40 \cdot Q'}{Q^2} + 0 + 0{,}015 \cdot 1 = \frac{0 \cdot Q - 40 \cdot 1}{Q^2} + 0{,}015 =$$
$$= -\frac{40}{Q^2} + 0{,}015$$

$$AC' = 0 \Leftrightarrow -\frac{40}{Q^2} + 0{,}015 = 0 \Leftrightarrow Q^2 \cdot \left(-\frac{40}{Q^2}\right) + Q^2 \cdot 0{,}015 = Q^2 \cdot 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -40 + 0{,}015Q^2 = 0 \Leftrightarrow 0{,}015Q^2 = 40 \Leftrightarrow \frac{0{,}015Q^2}{0{,}015} = \frac{40}{0{,}015} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Q^2 = 2666{,}67 \Leftrightarrow Q = \pm\sqrt{2666{,}67} \Leftrightarrow Q = \pm 51{,}64 \approx \pm 52$$

Η αρνητική ρίζα απορρίπτεται αφού $Q > 0$

Μοναδική αποδεκτή ρίζα της πρώτης παραγώγου η

$Q = 52$ (πιθανό σημείο ακροτάτου)

Κριτήριο 2ης παραγώγου

$$AC'' = \left(-\frac{40}{Q^2} + 0{,}015\right)' = \left(-\frac{40}{Q^2}\right)' + (0{,}015)' = -\frac{(40)' \cdot Q^2 - 40 \cdot (Q^2)'}{(Q^2)^2} + 0 =$$
$$= -\frac{0 \cdot Q^2 - 40 \cdot 2Q}{Q^4} = -\frac{-80Q}{Q^4} = \frac{80}{Q^3}$$

$$AC''_{(52)} = \frac{80}{52^3} = \frac{80}{140608} = 0{,}0006 > 0$$

Άρα για $Q = 52$ μονάδες προϊόντος η συνάρτηση μέσου κόστους ελαχιστοποιείται, με ελάχιστη τιμή

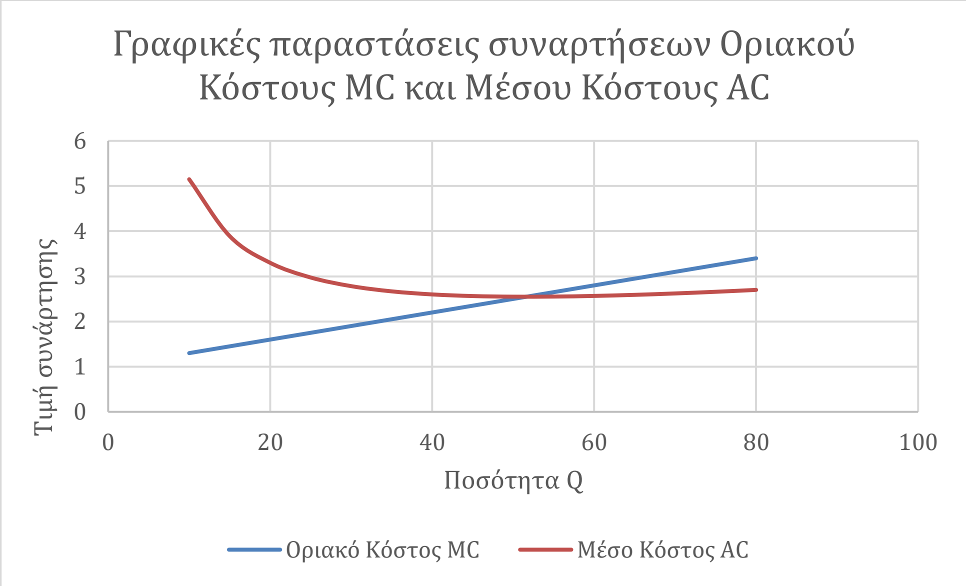
$$AC_{(52)} = \frac{40}{52} + 1 + 0{,}015 \cdot 52 = 0{,}77 + 1 + 0{,}78 = 2{,}55 \text{ νομισματικές μονάδες}$$

Υποερώτημα iii

Μέσω Excel δημιουργήσαμε τον ακόλουθο πίνακα τιμών για τις συναρτήσεις οριακού κόστους MC και μέσου κόστους AC, στο ζητούμενο διάστημα [10,80].

Ποσότητα Q	Συνάρτηση Οριακού Κόστους MC	Συνάρτηση Μέσου Κόστους AC
10	1,3	5,15
15	1,45	3,891666667
20	1,6	3,3
25	1,75	2,975
30	1,9	2,783333333
35	2,05	2,667857143
40	2,2	2,6
45	2,35	2,563888889
50	2,5	2,55
55	2,65	2,552272727
60	2,8	2,566666667
65	2,95	2,590384615
70	3,1	2,621428571
75	3,25	2,658333333
80	3,4	2,7

Η γραφική παράσταση των συναρτήσεων οριακού κόστους MC και μέσου κόστους AC, όπως προέκυψαν από το Excel είναι αυτές που ακολουθούν



Από τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις επιβεβαιώνεται ότι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης μέσου κόστους AC παρουσιάζεται όταν το επίπεδο παραγωγής είναι Q ≈ 52 μονάδες αλλά και η μονοτονία της ίδιας συνάρτησης, η οποία είχε προσεγγιστεί στο υποερώτημα ii μέσω των διαφορετικών τιμών της συνάρτησης.